

УДК 514.18

МОДЕЛЬ ПОВНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНОЇ ОБЛАСТІ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Соболь О.М., д.т.н.,

Кравців С.Я., к.т.н.,

Стельмах О.А., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України

(м. Харків, Україна)

Актуальність статті полягає у відсутності моделей і методів максимального та повного покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду.

Основною метою розв'язання задач оптимального покриття є пошук екстремуму цільової функції з урахуванням певної системи обмежень, що витікають з постановки задачі.

Для того, щоб розв'язати задачу покриття заданої області у двовимірному просторі існують різні методи покриття, а саме покриття заданої області колами однакового радіусу, колами змінного радіусу, прямокутниками, багатокутниками, а також об'єктами зі змінними метричними характеристиками тощо.

Мета статті полягає є формулюванні постановки задачі та розробці моделі повного покриття заданої області (неопуклий багатокутних з набором підобластей покриття) з урахуванням обмежень спеціального виду.

В цій роботі було розроблено математичну модель повного покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень: мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття; мінімум площі перетину об'єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору; параметри розміщення об'єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей; належність пріоритетних областей об'єктам покриття; належність заданих точок об'єктам покриття; обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття.

Отримана модель дозволяє розробити обґрунтований метод геометричного моделювання повного покриття та здійснити комп'ютерне моделювання покриття заданої області з урахуванням обмежень спеціального виду.

Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання інших задач, що витікають із загальної постановки, та на розробку

методів геометричної оптимізації.

Ключові слова: повне покриття, обмеження спеціального виду, загальна модель, задана область, підобласті.

Постановка проблеми. Задачі покриття є актуальними у різних сферах застосування. Основною метою розв'язання задач оптимального покриття є пошук екстремуму цільової функції з урахуванням певної системи обмежень, що витікають з постановки задачі. У зв'язку з цим, виникає необхідність у розробці моделей та методів розв'язання даного класу задач, що сприятиме розвитку теорії геометричного проектування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Напрямо наукових досліджень, пов'язаних із розробкою моделей та методів оптимального покриття геометричних об'єктів, було започатковано Ю.Г. Стояном та С.В. Яковлевим [1]. Для формалізації обмежень в задачах покриття використовується математичний апарат ω -функцій, які являють собою (при розв'язанні задачі у просторі R^2) площі перетину відповідних геометричних об'єктів. Інтенсивні дослідження задач покриття обумовлені широким використанням їх при синтезі систем неруйнівного контролю, систем управління якістю зварних робіт, систем управління польотами, радіолокаційних систем, систем реагування на пожежі (небезпечні події або надзвичайні ситуації) і т.д. Не дивлячись на велику кількість публікацій щодо розв'язання задач покриття, рішення вдалося отримати лише для досить вузького класу задач. В основному це задачі, в яких об'єкти покриття мають просту просторову форму (кулі, паралелепіпеди). У класі опуклих тіл отримані цікаві оцінки для щільності покриття, для числа множин, що покривають обмежену область.

В одній із попередніх робіт [2] було сформульовано загальну постановку задачі оптимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, розроблено модель оптимального покриття та досліджено її особливості. В результаті чого встановлено, що цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв'язання задачі; обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусочно-лінійних виразів; визначено кількість обмежень моделі. В роботі [3] розроблено загальну модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами з метою розв'язання задачі мінімізації ризику для людини загинути внаслідок виникнення небезпечних подій. Також в роботі [4] було розроблено математичну модель покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням певних обмежень.

Незважаючи на вищенаведені дослідження, актуальною задачею є розробка моделей і методів максимального та повного покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду.

Формулювання цілей статті. В даній роботі необхідно сформулювати постановку задачі та розробити модель повного покриття заданої області (неопуклий багатокутних з набором підобластей покриття) з урахуванням обмежень спеціального виду.

Основна частина. Розглянемо змістовну постановку задачі повного покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками. Нехай у просторі R^2 задано область $S_0(m_0, u_0)$ (рис. 1), яка являє собою у загальному випадку неопуклий багатокутник з координатами вершин $m_0 = \{x_{0,1}, y_{0,1}, \dots, x_{0,n_0}, y_{0,n_0}\}$ та зв'язана з глобальною (нерухомою) системою координат XOY (початок глобальної системи координат співпадає з однією з вершин багатокутника, а $u_0 = \{0, 0\}$). Слід відзначити, що m_0 – метричні характеристики, а u_0 – параметри розміщення $S_0(m_0, u_0)$.

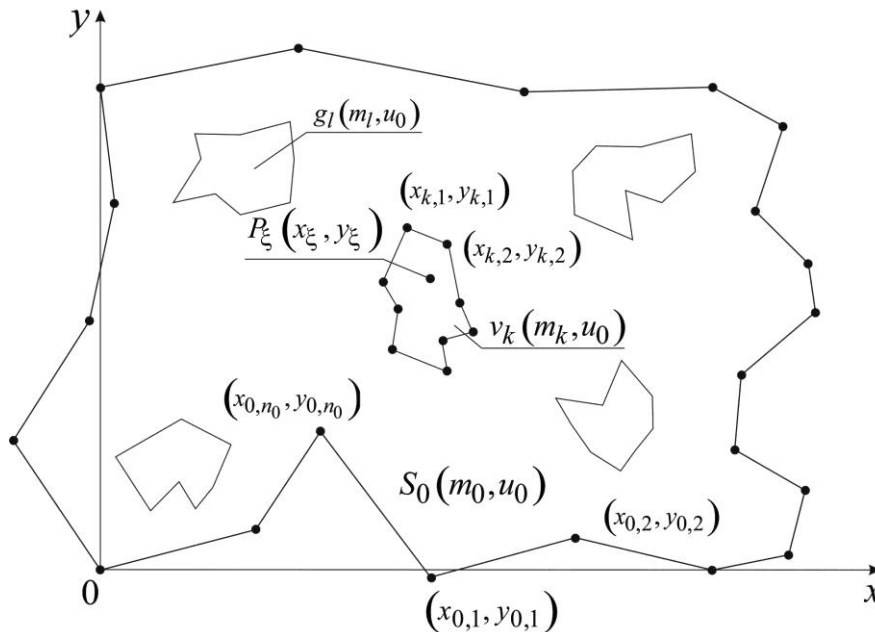


Рис. 1. Область $S_0(m_0, u_0)$ та підобласті $v_k(m_k, u_0)$, $k = 1, \dots, N_k$, і $g_l(m_l, u_0)$, $l = 1, \dots, N_l$

Область $S_0(m_0, u_0)$ має підобласті $v_k(m_k, u_0) \in V$, $k = 1, \dots, N_k$, які належать множині V . Підобласті $v_k(m_k, u_0)$, $k = 1, \dots, N_k$, також являють собою неопуклі багатокутники, які задані координатами вершин $m_k = \{x_{k,1}, y_{k,1}, \dots, x_{k,n_k}, y_{k,n_k}\}$ у глобальній системі

координат. Даним підобластям мають належати параметри розміщення локальних (рухомих) систем координат $X_{c,i}O_{c,i}Y_{c,i}$ об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$ відносно глобальної системи координат. Об'єкти покриття в загальному випадку являють собою неопуклі багатокутники, які визначаються координатами вершин $m_{c,i} = \{x_{c,i,1}, y_{c,i,1}, \dots, x_{c,i,n_{c,i}}, y_{c,i,n_{c,i}}\}$ у локальних системах координат та параметрами розміщення даних систем координат $u_{c,i} = \{x_{c,i}, y_{c,i}\}$. Слід відзначити, що метричні характеристики $m_{c,i}$ та параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття $u_{c,i}$ є змінними (на відміну від заданих області та підобластей, для яких метричні характеристики та параметри розміщення є постійними).

Нехай $g_l(m_l, u_0) \in G$, $l=1, \dots, N_l$, $G \subset V$ – підобласті, які мають пріоритет стосовно покриття та розміщення локальних систем координат об'єктів $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$. Також в області $S_0(m_0, u_0)$ у глобальній системі координат задано точки $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j=1, \dots, N_d$, які мають належати областям перетину заданої кількості M об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i=1, \dots, N$.

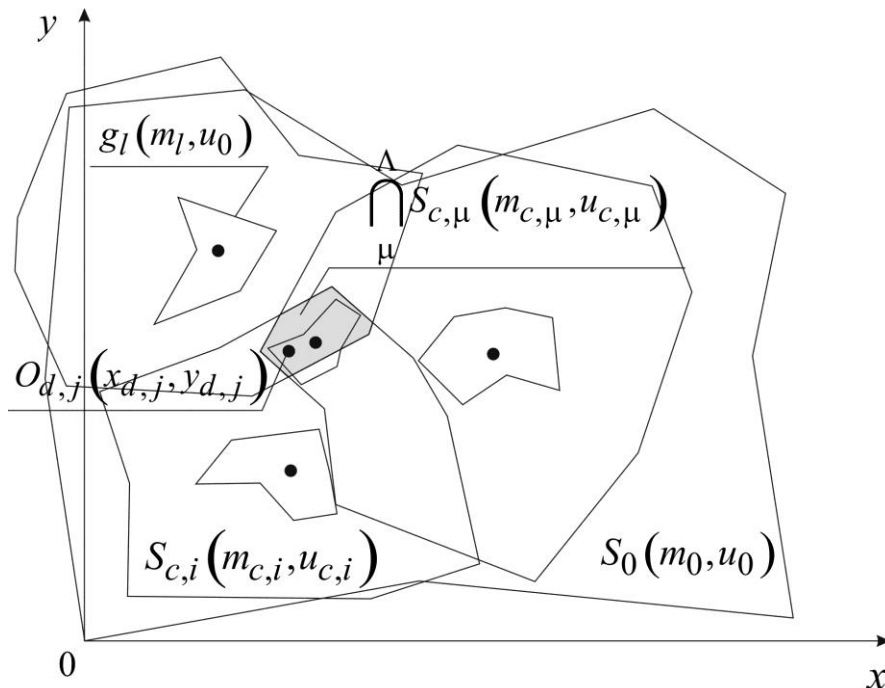


Рис. 2. Повне покриття підобластей $g_l(m_l, u_0)$, $l=1, \dots, N_l$, та покриття точок $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j=1, \dots, N_d$

Необхідно здійснити покриття області $S_0(m_0, u_0)$ об'єктами $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$, таким чином, щоб їх кількість була мінімальною та виконувалися наступні обмеження (рис. 2):

– мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$;

– мінімум площі перетину об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$, та $cS_0(m_{cS_0}, u_{cS_0})$ – доповнення області $S_0(m_0, u_0)$ до простору R^2 ;

– параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$, мають належати точкам $P_\xi(x_\xi, y_\xi)$, $\xi = 1, \dots, N_\xi$, $N_\xi \geq N_k$, у підобластях $v_k(m_k, u_0)$, $k = 1, \dots, N_k$, з урахуванням пріоритетної належності підобластям $g_l(m_l, u_0)$, $l = 1, \dots, N_l$.

– належність підобластей $g_l(m_l, u_0)$, $l = 1, \dots, N_l$, об'єктам покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$;

– належність точок $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j = 1, \dots, N_d$, областям перетину Λ об'єктів покриття $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$, $i = 1, \dots, N$, $\Lambda \rightarrow M$, $\Lambda \geq 1$;

– обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття $m_{c,i}$, $i = 1, \dots, N$.

Тоді модель повного покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками має наступний вигляд:

$$\min_W N(m_{c,1}, u_{c,1}, \dots, m_{c,N}, u_{c,N}); \quad (1)$$

де W :

$$S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \cap S_{c,h}(m_{c,h}, u_{c,h}) \rightarrow \emptyset; \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, N-1; h = i+1, \dots, N;$$

$$S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \cap cS_0(m_{cS_0}, u_{cS_0}) \rightarrow \emptyset; \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$u_{c,i} \in P_\xi(x_\xi, y_\xi); i = 1, \dots, N; \xi \in \{1, \dots, N_\xi\}; N_\xi \geq N_k; \quad (4)$$

$$\left(\bigcup_{l=1}^{N_l} g_l(m_l, u_0) \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \right) = \bigcup_{l=1}^{N_l} g_l(m_l, u_0); \quad (5)$$

$$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j}) \in \bigcap_{\mu}^{\Lambda} S_{c,\mu}(m_{c,\mu}, u_{c,\mu}), \quad j=1, \dots, N_d; \quad (6)$$

$$\mu \in \{1, \dots, N\}; \quad \Lambda \geq 1;$$

$$m_{c,i} = f(t); \quad i=1, \dots, N; \quad (7)$$

де t – параметр, що впливає на метричні характеристики об'єктів покриття $m_{c,i}$, $i=1, \dots, N$.

Висновки. В даній роботі було розроблено модель повного покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень:

- мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття;
- мінімум площі перетину об'єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору;
- параметри розміщення об'єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей;
- належність пріоритетних областей об'єктам покриття;
- належність пріоритетних точок $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$, $j=1, \dots, N_d$ об'єктам покриття;
- обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття.

Отримана модель дозволяє розробити обґрунтований метод геометричного моделювання повного покриття та здійснити комп'ютерне моделювання покриття заданої області з урахуванням обмежень спеціального виду.

Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання інших задач, що витікають із загальної постановки, та на розробку методів геометричної оптимізації.

Література

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: наук. думка, 1986. 268 с.
2. Соболь О.М., Кравців С.Я. Модель покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2019. Вип. 14. С. 171–178.
3. Комяк В.М., Соболь О.М., Кравців С.Я. Модель та метод

оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами. *Науковий вісник Таврійського державного агротехнічного університету*. Мелітополь, 2018. Вип. 8, Т.1. С. 11–22.

4. Соболев О.М., Кравців С.Я., Стельмах О.А., Ляшевська О.І. Модель максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2020. Вип. 17. С. 115–122.

МОДЕЛЬ ПОЛНОГО ПОКРЫТИЯ ЗАДАНОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Соболев А.Н., Кравців С.Я., Стельмах О.А.

Основной целью решения задач оптимального покрытия является поиск экстремума целевой функции с учетом определенной системы ограничений, которая следует из постановки задачи.

Для решения задачи покрытия заданной области в двумерном пространстве существуют различные методы покрытия, а именно, покрытие заданной области кругами одинакового радиуса, кругами переменного радиуса, прямоугольниками, многоугольниками, а также объектами с переменными метрическими характеристиками и т.д.

В этой работе была разработана математическая модель полного покрытия заданной области невыпуклыми многоугольниками с переменными метрическими характеристиками с учетом следующих ограничений: минимум площади взаимного пересечения объектов покрытия; минимум площади пересечения объектов покрытия и дополнения заданной области до двумерного пространства; параметры размещения объектов покрытия должны принадлежать точкам в заданных подобластях с учетом приоритетных подобластей; принадлежность приоритетных областей объектам покрытия; принадлежность заданных точек объектам покрытия; ограничения специального вида, влияющие на метрические характеристики объектов покрытия.

Полученная модель позволяет разработать обоснованный метод геометрического моделирования полного покрытия и осуществить компьютерное моделирование покрытия заданной области с учетом ограничений специального вида.

Дальнейшие исследования будут направлены на решение других задач, вытекающих из общей постановки, а также на разработку методов геометрической оптимизации.

Ключевые слова: полное покрытие, ограничения специального вида, общая модель, заданная область, подобласти.

MODEL OF THE FULL COVERAGE OF A PARTICULAR AREA TAKING INTO ACCOUNT OF SPECIAL TYPE RESTRICTIONS

Sobol O., Kravtsiv S., Stelmakh O.

The relevance of the article lies in the lack of models and methods of maximum and complete coverage of specified areas, taking into account the limitations of a special kind.

The main problem of coverage problems is to find the minimum and optimal solutions with certain constraints, which will be determined by the models and methods of coverage.

In order to solve the problem of covering a given area in two-dimensional space, there are different methods of coverage, namely covering a given area with circles of the same radius, circles of variable radius, rectangles, polygons, and objects with variable metric characteristics.

The purpose of the article is to formulate the problem statement and develop a model of complete coverage of a given area (non-convex polygon with a set of sub-areas of coverage), taking into account the limitations of a special type.

In this work, a mathematical model of complete coverage of a given area by non-convex polygons with variable metric characteristics was developed, taking into account the following limitations: minimum area of mutual intersection of coverage objects; the minimum area of intersection of objects of coverage and addition of the set area to two-dimensional space; the parameters of placement of coverage objects should belong to the points in the specified sub-areas, taking into account the priority sub-areas; belonging of priority areas to the objects of the coverage area; belonging of priority points of subregions to objects of coverage; restrictions of a special kind that affect the metric characteristics of the objects of coverage.

The obtained model allows to develop a substantiated method of geometric modeling of full coverage and to carry out computer modeling of coverage of a given area, taking into account the limitations of a special type.

Further research will focus on solving other problems arising from the general formulation, and on the development of methods of geometric optimization.

Keywords: full coverage, special type restriction, general model, given area, subregions.