

"Точки стационарной фазы в апертурной антенне с обтекателем" (Совместно с Важинским С.Э.), Сборник трудов ХВУ; вып 24, 1999 г.

УДК 821.398.87

Сухаревский И.В., доктор физико-математических наук, профессор.

Важинский С.Э.

## ТОЧКИ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ В АПЕРТУРНОЙ АНТЕННЕ С ОБТЕКАТЕЛЕМ

*На основе работ авторов [1]-[5], включающих двупараметрическую теорию дифракции на слоистых структурах и обобщение принципа зеркальных изображений, в статье исследуется вопрос о существовании и определении координат точек стационарной фазы в переотраженном поле (возникающем в апертуре антенной системы с обтекателем).*

*В итоге каждой паре заданных направлений ортов сканирования и излучения сопоставляется дискретная система точек стационарной фазы, малые окрестности которых вносят существенный вклад в дальнее боковое излучение \*/. Тем самым открываются принципиальные возможности компенсации (по крайней мере, частичной) этих вкладов посредством технических устройств. Все рассмотрение проведено для трехмерного случая.*

### 1. Введение

Пусть апертура  $S_0$  расположена в плоскости  $x_3=h>0$  и излучает в полупространство  $\Omega(x_3<h)$  поле сторонних \*\*/ источников  $\vec{E}_{CT}(\vec{x}), \vec{H}_{CT}(\vec{x})$ , причем  $\Omega$  содержит диэлектрический обтекатель, ограниченный гладкими выпуклыми поверхностями  $S, S_1$  (на схематическом рис.1 дан разрез по  $x_1Ox_3$ ).

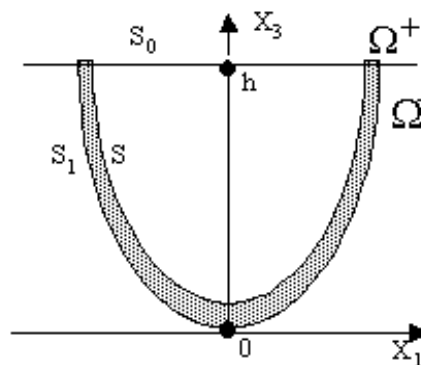


Рис.1

\*/ Конкретные примеры и результаты числовых расчетов можно найти в [5].  
 \*\*/ распределенных в  $\Omega^+(x_3 > h)$ .

Как установлено в [1], интегральное представление комплексной диаграммы направленности в направлении орта  $\vec{R}^0$  для такой антенной системы имеет (в приближении физической оптики) следующий вид:

$$\vec{q} \cdot \vec{E}(\vec{R}^0) = \int_{S_0} \left[ \vec{E}_{\text{ст}}^T(\vec{x}) \vec{H}_0^\perp(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}) - \vec{E}_0^T(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}) \vec{H}_{\text{ст}}^\perp(\vec{x}) \right] \cdot dS, \quad (1)$$

где  $\vec{q}$  - произвольный орт, символы вида  $\vec{A}^\perp, \vec{B}^T$  имеют следующий смысл:  $\vec{A}^\perp = \vec{n} \times \vec{A}$ ,  $\vec{B}^T = \vec{B} - \vec{n} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{n})$  ( $\vec{n}$  - орт нормали к  $S_0$ ). Далее,  $(\vec{E}^0(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}); \vec{H}^0(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}))$  есть поле, возбуждаемое плоской волной

$$\vec{E}_0 = (\vec{q} - \vec{R}^0(\vec{q} \cdot \vec{R}^0)) \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})}; \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{q} \times \vec{R}^0) e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})} \quad (2)$$

в свободном пространстве, содержащем лишь симметризованную систему рассеивателей – обтекатель и его зеркальное отражение относительно плоскости  $x_3 = h$ .

Здесь  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$  ( $\varepsilon_0, \mu_0$  - параметры свободного пространства).

Предполагается наличие коротковолновой ситуации:  $k_0 L \gg 1$ , где  $L$  - характерный линейный размер в рассматриваемой задаче. В последующем будем относить все координаты, длины волн и т. д. к  $L$ . В частности при этом волновое число  $k_0$  оказывается большим безразмерным параметром:  $k_0 \gg 1$ .

Примем следующую математическую модель для распределения стороннего поля в апертуре:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{ст}}(\vec{x}) &= \vec{\Lambda}(\vec{x}) \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot (\vec{p}^0 \cdot \vec{x})}, \\ \vec{H}_{\text{ст}}(\vec{x}) &= (\vec{p}^0 \times \vec{\Lambda}(\vec{x})) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot (\vec{p}^0 \cdot \vec{x})}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\vec{p}^0$  - орт направления сканирования.

Введем амплитудно-фазовое представление поля  $(\vec{E}, \vec{H})$  в апертуре:

$$\vec{E} = \vec{A} e^{i \cdot k_0 \cdot \Phi_0}; \quad \vec{H} = (\vec{\nabla} \Phi_0 \times \vec{A}) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot \Phi_0}, \quad \text{где}$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}); \quad \Phi_0 = \Phi_0(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}) \quad */ \quad (4)$$

\*/ Формулы (3) и (4) имеют асимптотический характер: представляемые ими поля удовлетворяют уравнениям Максвелла аппроксимативно, с точностью до  $O\left(\frac{1}{k_0}\right)$

Единичные векторы  $\vec{p}^0$  (в (3)) и  $\vec{R}^0$  (в (4)) задаются следующим образом:

$$\vec{p}^0 = -\begin{pmatrix} \sin \psi \cdot \cos \alpha \\ \sin \psi \cdot \sin \alpha \\ \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{R}^0 = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

причем  $\alpha; \varphi \in [0; 2\pi); \vartheta \in (0; \pi/2]; \psi \in [0; \pi/2)$ .

Из соотношений (1), (3), (4) следует интегральное представление:

$$\vec{q} \cdot \vec{E}(\vec{R}^0) = \int_{S_0} \vec{U}(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}) \cdot e^{i \cdot k_0 \cdot \Phi(\vec{x})} dS, \quad (6)$$

в которм

$$\Phi(\vec{x}) = (\vec{p} \cdot \vec{x}) + \Phi_0(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}), \quad (7)$$

$$\vec{U}(\vec{x} | \vec{R}^0, \vec{q}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left\{ [\vec{n} \times (\vec{\nabla} \Phi_0 \times \vec{A})] - [(\vec{A} \times \vec{n}) \times \vec{p}] \cdot \vec{A} \right\} \quad (8)$$

Исследование внутренних переотражений под обтекателем ниже будет основано на следующей лучевой конструкции.

Выделим в падающей плоской волне (2) лучи, пронизывающие поверхность  $S'$  в направлении орта  $(-\vec{R}^0)$  так, что в "точках входа" будет  $(\vec{R}^0 \cdot \vec{n}) \geq \text{const} > 0$ , и обозначим через  $\bar{S}$  часть поверхности  $S$ , "освещенную" этими лучами (рис.2)

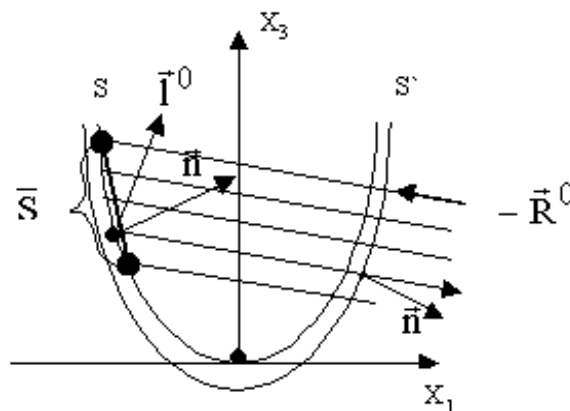


Рис.2

К задаче о прохождении лучей через  $S'$  и прилегающий к  $S'$  слой (однородный или стратифицированный), равно как и к последующему отраже-

нию от  $\bar{S}$ , в данной работе применяется некоторый асимптотический метод (“двупараметрический метод” – ([2], [3], [4])).

Кратко охарактеризуем этот метод, ограничившись случаем эквидистантных поверхностей  $S, S'$  и дифракции на слое плоской или локально плоской ([6]) волны вида  $\vec{E} = \vec{q} \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})}$  причем, вообще говоря,  $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x})$ , так что

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[ (\vec{q} \times \vec{R}^0) + \frac{1}{ik_0} (\vec{\nabla} \times \vec{q}) \right] e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})}$$

и, если в рассматриваемой задаче  $\frac{|\vec{\nabla} \times \vec{q}|}{|\vec{q} \times \vec{R}^0|} \leq \text{const}$ , то речь идет о волне, за-

даваемой соотношениями

$$\vec{E} = \vec{q} \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})}; \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{q} \times \vec{R}^0) \cdot e^{-i \cdot k_0 \cdot (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})} + O\left(\frac{1}{k_0}\right). \quad (9)$$

В двупараметрической асимптотической теории в слое  $G$ , ограниченном поверхностями  $S, S'$ , и некоторой его окрестности вводятся координаты  $(\sigma_1, \sigma_2, n)$ , где  $(\sigma_1, \sigma_2)$  - криволинейные координаты на  $S$ , а  $|n|$  - расстояние (по нормали) от  $S$ . Кроме того, вводится безразмерное отношение  $n$  к толщине слоя  $\delta$ :  $\nu = \frac{n}{\delta}$  (в слое таким образом,  $0 \leq n \leq \delta$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ ) и без-

размерные параметры  $u = \kappa_0 \cdot \delta$ ;  $v = \kappa_0/k_0$

(10)

( $\kappa_0$  – характерное значение кривизны на  $S$ ).

Предполагается, что  $u \ll 1$ ,  $v \ll 1$ . В такой “двупараметрической” задаче существенную роль должно играть отношение  $u/v = w = \kappa_0 \cdot \delta$ , причем наибольший прикладной интерес (прежде всего, в связи с электродинамикой антенных обтекателей) представляет рассматриваемый здесь случай  $w \sim 1$ .

Развитый в [2], [4] и примененный в данной работе двупараметрический асимптотический метод основан на сочетании геометрооптических (лучевых) конструкций с разложениями, свойственными “пограничным слоям”: коэффициенты разложений в  $G$  являются функциями точки в пространстве, растянутом в направлении нормали, - функциями координат  $(\sigma_1, \sigma_2, \nu)$ . Этот метод приводит к последовательности эффективно (в замкнутом виде) решаемых краевых задач: в слоистой структуре  $G$ , затем вне  $G$ , затем снова в  $G$  и т.д.

Из общих результатов, данных в [4], следует, в частности, что прохождение локально плоской волны вида (9) через слой  $G$  преобразует ее – в главном асимптотическом приближении - в волну, представляемую форму-

лами, аналогичными (9), с измененными лишь амплитудными векторами при сохранении прежней “фазовой” экспоненты  $e^{-i \cdot k_0 \cdot (\bar{R}^0 \cdot \bar{x})}$ .

При последующем отражении от поверхности  $\bar{S}$  амплитудные векторы отраженной волны определяются ([4]) посредством двухпараметрических асимптотических разложений; фаза же имеет геометрооптическое выражение: на отраженном луче

$$\Phi_0(\bar{x} | \bar{R}^0; \bar{q}) = -(\bar{R}^0 \cdot \bar{\xi}) + |\bar{x} - \bar{\xi}|, \quad (11)$$

где  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$  - радиус-вектор точки отражения  $M_\xi$ ,

$$\bar{x} = \bar{\xi} + \bar{l}^0(\xi_1, \xi_2) \cdot t = \bar{x}(\xi_1, \xi_2, t), \quad (12)$$

$$\bar{l}^0 = -\bar{R}^0 + 2 \cdot \bar{n} \cdot (\bar{R}^0 \cdot \bar{n}), \quad (13)$$

причем  $\bar{n}$  - орт нормали к  $\bar{S}$  в точке  $M_\xi$ .

Таким образом, из формул (7), (11) получаем выражение фазы в интеграле (6):

$$\Phi = \Phi(\bar{x}, \bar{\xi}) = (\bar{p} \cdot \bar{x}) - (\bar{R}^0 \cdot \bar{\xi}) + (\bar{x} - \bar{\xi}). \quad (14)$$

Далее, при  $\bar{x} \in S_0$  соотношение (12) означает, что  $x_1 = \xi_1 + l_1^0 \cdot t$ ;  $x_2 = \xi_2 + l_2^0 \cdot t$ ;  $h = g + l_3^0 \cdot t$ , откуда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - (h - g) \cdot \frac{l_1^0}{l_3^0} = x_1(\xi_1, \xi_2); \\ x_2 &= \xi_2 - (h - g) \cdot \frac{l_2^0}{l_3^0} = x_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Сделаем следующее важное замечание относительно функций (15). При весьма широких предположениях относительно поверхности  $\bar{S}$  и параметра  $h$  система функций (15) оказывается локально обратимой в окрестности каждой некритической точки  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$  \*/, причем обратные функции  $\xi_1(x_1, x_2)$ ,  $\xi_2(x_1, x_2)$  дифференцируемы в точке  $x_1^0 = x_1(\xi_1^0, \xi_2^0)$ ,  $x_2^0 = x_2(\xi_1^0, \xi_2^0)$ .

## 2. Точки стационарной фазы: существование, вычисление координат.

Исследуем производные фазовой функции  $\Phi(\bar{x}, \bar{\xi})$ . В окрестности каждой некритической точки имеем:  $\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2)$ ;  $\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2)$ , так что  $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2) = \xi_3(x_1, x_2)$ . Поэтому радиус-вектор переменной точки на  $\bar{S}$

$\vec{\xi} = \vec{\xi}(x_1, x_2)$  можно рассматривать как функцию криволинейных координат  $x_1, x_2$ , а производные  $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_1}; \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_2}$  являются векторами, касательными к  $\bar{S}$ .

Отметив, что при  $\vec{x} \in S_0, \vec{\xi} \in \bar{S}$

$\Phi = \Phi(\vec{x}, \vec{\xi}) = \Phi(\vec{x}, \vec{\xi}(x_1, x_2)) = \Phi[x_1, x_2]$ , выводим: при  $i=1;2$

\*/ т.е. вблизи каждой точки  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$ , в которой якобиан  $\frac{\partial(x_1; x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi[x_1, x_2]}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = p_i^0 + \frac{x_i - \xi_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\xi_k - x_k}{|\xi_k - x_k|} - \bar{R}_k^0 \right) \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \\ &= p_i^0 + \frac{x_i - \xi_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} + \left( \frac{\vec{\xi} - \vec{x}}{|\vec{\xi} - \vec{x}|} - \bar{R}^0 \right) \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Далее, из (12), (13) легко следует:  $\bar{l}^0 = \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} = -\bar{R}^0 + 2 \cdot \vec{n} \cdot (\bar{R}^0 \cdot \vec{n})$ , отку-

да, во-первых  $\frac{x_i - \xi_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} = l_i^0$ , ( $i=1;2$ ); во-вторых же,  $\frac{\vec{\xi} - \vec{x}}{|\vec{\xi} - \vec{x}|} - \bar{R}^0 = -2\vec{n} \cdot (\bar{R}^0 \cdot \vec{n})$ ,

откуда видно, что  $\left( \frac{\vec{\xi} - \vec{x}}{|\vec{\xi} - \vec{x}|} - \bar{R}^0 \right) \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_i} = 0$ . Окончательно имеем важный ре-

зультат:

$$\frac{\partial \Phi[x_1, x_2]}{\partial x_i} = p_i^0 + l_i^0(\xi_1, \xi_2), \quad (i=1;2), \quad (16)$$

из которого вытекает следующее предложение.

**Теорема.** Если система уравнений

$$l_1^0(\xi_1, \xi_2) + p_1^0 = 0; \quad l_2^0(\xi_1, \xi_2) + p_2^0 = 0 \quad (17)$$

имеет некоторое решение  $(\xi_1, \xi_2)$ , причем точка  $(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \in \bar{S}$ , то величины  $(x_1, x_2, h)$ , выражаемые через это решение по формулам (15), являются координатами точки стационарности фазовой функции  $\Phi(x_1, x_2)$ .

Таким образом, завершение поиска точек стационарной фазы в апертуре, вычисление координат  $(x_1, x_2, h)$  этих точек сводится к эффективному решению системы уравнений (17).

К этой задаче мы и приступим. Из соотношений (5), (13), применив сокращенные обозначения:  $\cos \varphi = c$ ;  $\sin \varphi = s$ ;  $H^2 = 1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2$ , получаем:

$$\bar{I}^0 = \begin{pmatrix} -c \cdot \sin \vartheta \\ -s \cdot \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \frac{2}{H^2} \begin{pmatrix} g_{\xi_1} \\ g_{\xi_2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [(g_{\xi_1} c + g_{\xi_2} s) \cdot \sin \vartheta + \cos \vartheta], \quad (18)$$

вследствие чего система уравнений (17) преобразуется к виду:

$$\frac{2g_{\xi_1}}{1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2} [(g_{\xi_1} \cdot c + g_{\xi_2} \cdot s) \cdot \sin \vartheta + \cos \vartheta] = A_1; \quad (19)$$

$$\frac{2g_{\xi_2}}{1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2} [(g_{\xi_1} \cdot c + g_{\xi_2} \cdot s) \sin \vartheta + \cos \vartheta] = A_2; \quad (20)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\sin \psi \cdot \cos \alpha + \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ A_2 &= -\sin \psi \cdot \sin \alpha + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из (19),(20) видно, что

$$\frac{g_{\xi_1}}{A_1} = \frac{g_{\xi_2}}{A_2} \quad (22)$$

Обозначив общее значение отношений (22) через  $w$  ( $w = w(\xi_1, \xi_2)$ ), имеем:

$$g_{\xi_1} = A_1 \cdot w; \quad g_{\xi_2} = A_2 \cdot w \quad (23)$$

и, после подстановки в (19) (или в(20)), получаем:

$$(A^2 - 2\bar{A} \sin \vartheta) \cdot w^2 - 2 \cos \vartheta \cdot w + 1 = 0, \text{ где}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 = \sin^2 \psi + \sin^2 \vartheta + 2 \sin \psi \cdot \sin \vartheta \cdot \cos(\varphi - \alpha),$$

$$\bar{A} = A_1 c + A_2 s = \sin \vartheta + \sin \psi \cdot \cos(\varphi - \alpha), \text{ и в конечном счете, уравнение для}$$

$w$ :

$$(\sin^2 \psi - \sin^2 \vartheta) \cdot w - 2 \cos \vartheta \cdot w + 1 = 0, \quad (24)$$

откуда можно вывести два решения:

$$w_1 = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta + \psi}{2}}{\sin \vartheta - \sin \psi}; \quad (25')$$

$$w_2 = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta - \psi}{2}}{\sin \vartheta - \sin \psi}; \quad (25'')$$

и, соответственно,





$$g_{\xi_1} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta - \psi}{2}; \quad g_{\xi_2} = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta - \psi}{2} \quad (29)$$

и, после подстановки выражений (29) в (27), имеем  $l_3^0 = -\cos \psi < 0$ .

### 3. Выводы

Установить существование и определить координаты точек стационарной фазы в переотраженном поле, возникающем на апертуре  $S_0$ , можно следующими построениями.

1) При заданных векторах  $\vec{R}^0, \vec{p}^0$  (то есть при заданных направлениях излучения и сканирования) решается система уравнений (26') и выделяются решения (точки  $\vec{\xi}(\xi_1, \xi_2, g)$ ), принадлежащие области  $\bar{S} \in S$ .

2) Каждой найденной точке  $\vec{\xi} \in \bar{S}$  сопоставляем соответствующие точки плоскости  $x_3=h$  с координатами  $(x_1, x_2, h)$ , определяемыми по формулам (15).

3) Среди указанных точек выделяем те, которые принадлежат области  $S_0$  (то есть апертуре рассматриваемой антенной системы) и, таким образом, находим в апертуре искомое множество точек стационарной фазы переотраженного поверхностью  $S$  поля.

Практическое значение проведенных здесь рассмотрений состоит в построении сетки точек стационарной фазы, локальные окрестности которых порождают значительную часть вклада, вносимого переотражениями от  $S$  в боковое излучение рассматриваемой антенной системы. (Конкретные примеры и результаты числовых расчетов можно найти в [5]).

Тем самым открывается принципиальная возможность компенсации (по крайней мере, частичной) этих вкладов техническими устройствами.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Сухаревский И.В., Сухаревский О.И. Расчет поля, возбуждаемого излучающей апертурой в присутствии произвольной системы рассеивателей. Радиотехника и электроника, 1986, Вып.1, с 8-13.

[2] Сухаревский И.В. О прохождении электромагнитных волн через радиопрозрачный слой. Радиотехника и электроника, 12, 2, 1967, с.203-215.

[3] Гринберг С.И., Семеняка Е.Н., Сухаревский И.В. Коротковолновая асимптотика функции Грина задачи дифракции на плоском слое. 1973, 13, 3, с.670-682.

[4] Сухаревский И.В. Асимптотические методы решения некоторых классов задач дифракции волн. "Радиотехника" (Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник), вып.100, 1996, с.19-41.

[5] Сухаревский И.В., Важинский С.Э. Исследование влияния обтекателя на уровень дальнего бокового излучения антенной системы. 1999, Сборник научных работ ХВУ. Вып.24.

[6] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн М. “Наука” 1978 с.9 – 540.