

УДК 514.18

Л. М. Куценко, д.т.н., професор, проф. каф. (ORCID 0000-0003-1554-8848)
С. Ю. Руденко, к.т.н., викл. каф. (ORCID 0000-0002-5688-0639)
А. Я. Калиновський, к.т.н., доцент, нач. каф. (ORCID 0000-0002-1021-5799)
О. Г. Поліванов, PhD, викл. каф. (ORCID 0000-0002-6396-1680)
О. І. Сухарькова, викл. каф. (ORCID 0000-0003-1033-4728)
Національний університет цивільного захисту України, Харків, Україна

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПНЕВМАТИЧНИХ ФАСОННИХ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ, ЗМІЩЕНИХ НАМОТКОЮ НИТКИ

Запропоновано схему наближеного розрахунку геометричних форм сім'ї меридіанів гумової пневматичної фасонної поверхні обертання залежно від функції зміни середньої кривини вздовж осі цієї поверхні. Одержану фасонну поверхню обертання передбачається зміцнювати намотуванням нитки у вздовж напрямів геодезичних кривих знайденої поверхні. В роботі наведено спосіб опису меридіанів поверхонь обертання шляхом розв'язання прямої і оберненої задач. Пояснено недоліки розв'язків прямої задачі, де одержуються незручні форми поверхонь для застосування у пневматичних виробках. Розв'язки оберненої задачі дозволяють одержати форми фасонних поверхонь обертання, коли зусилля спрямовані вздовж їх осей обертання. Розв'язок оберненої задачі одержано на базі застосування диференціальних рівнянь Фур'є. Також здійснено побудову фасонної поверхні обертання з намоткою по геодезичних з урахуванням кривини меридіана. В додавок наведено спосіб визначення геодезичної намотки на гофрований поверхні обертання з меридіаном пілкоподібною форми. Зазначено, що моделювання пневматичної поверхні доцільно здійснювати на основі обчислення її середньої кривини. Тому що значення середньої кривини поверхні розділу двох врівноважених фізичних середовищ буде пропорційне різниці значень тисків у цих середовищах. Варіюючи середню кривину поверхні, можна обирати величину тиску, яку витримає пневматичний виріб. Встановлено існування двох варіантів фасонних поверхонь обертання («жорстких» та «м'яких»). Перший варіант призначено для застосування в звичайних транспортних засобах з пневматичними подушками форми торів. Другий варіант орієнтовано на транспортні засоби спеціального призначення, де «м'якість» підвіски забезпечить проходимость по шляхам зі складним рельєфом. Для практики проведені дослідження корисні і важливі тому, що вони дозволяють будувати геодезичні лише на фрагментах фасонних поверхонь, які схильні до руйнування.

Ключові слова: меридіан обертання, середня кривина поверхні, гофрована поверхня обертання, армування намотуванням

1. Вступ

Оперативність допомоги населенню, яке постраждало в результаті аварій, суттєво залежить від наявності у рятувальників сучасного обладнання. Здебільшого рятувальникам доводиться вилучати постраждалих з понівечених автотранспортних засобів під час ДТП, евакуювати людей під час пожежі, рятувати під час повені, визволяти їх з-під уламків обваленого будинку. Аварійно-рятувальні служби також залучаються до ліквідації наслідків поривів трубопроводів, чим запобігають витоку різноманітних (у тому числі, і небезпечних) речовин.

Очевидно, що спектр обладнання, яке використовується під час аварійних робіт, досить широкий. Поряд з гідравлічним інструментом для проведення таких робіт широко застосовується пневматичне обладнання. Зазвичай, основу пневматичного обладнання складають надміцні (гумові) робочі поверхні [1], а саме: пневмоподушки, пневмодомкрати, пневмозаглушки, пневмобандажі тощо. При цьому, що важливо, фізичні властивості поверхонь робочих органів переліченого пневматичного обладнання суттєво залежить від їх геометричних форм [2].

Сучасні комп'ютерні технології дозволяють досліджувати вплив

геометричної форми поверхонь на їх фізичні властивості. Тому доцільними будуть дослідження, спрямовані на виявлення причино-наслідкового зв'язку геометричних форм поверхонь з їх фізичними властивостями. В даній роботі увагу приділено поверхням, для яких характерною є їх стала (тобто незмінна за значенням в часі) середня кривина. Якщо такі поверхні використати в конструкціях пневматичного обладнання, то всі ділянки виявляться рівно напруженими – тобто рівно ймовірними щодо їх руйнування. Нагадаємо, що середня кривина поверхні визначається півсумою мінімальної й максимальної кривин ліній перетину поверхні із взаємно перпендикулярними площинами, що проходять через нормаль у даній точці поверхні [3]. Фізична інтерпретація середньої кривини полягає у наступному. Нехай поверхня Γ є межею двох середовищ і знаходиться в рівновазі. Нехай p_1 і p_2 — тиски, які утворюють на поверхню Γ перше та друге середовище відповідно, λ — поверхневий натяг Γ . В результаті, поверхня, що знаходиться в рівновазі та є межею двох середовищ, має сталу середню кривину $H = \frac{1}{\lambda}(p_2 - p_1)$.

Такі унікальні властивості поверхонь сталої середньої кривини доцільно використовувати при конструюванні робочих поверхонь пневматичних виробів (гумових підйомників або амортизаторів). Згадана властивість поверхонь сталої середньої кривини базується на фундаментальній теоремі Пуассона-Лапласа, згідно з якою середня кривина поверхні розділу двох врівноважених фізичних середовищ пропорційна різниці значень тисків у їх суміжних порожнинах. Отже, варіюючи середньою кривиною поверхні, можна обирати величину тиску, яку витримає дана конструкція пневматичного виробу. Зазначимо, що рівняння Лапласа і Пуассона в курсі математичної фізики описують потоки ідеальних рідин в стаціонарних потоках, а також стаціонарний розподіл напруженості фізичних полів [4]. При цьому, рівняння Лапласа описує зазначені процеси за умови відсутності внутрішніх джерел енергії (чи відтоків).

Досліджувати зміну середньої сталої кривини поверхні обертання зручно на прикладі зміни геометричної форми мильної плівки [5]. Для прикладу розглянемо два кільцевих контури, жорстко закріплених один навпроти одного в паралельних площинах (рис. 1, а). «Натягнемо» на контури мильну плівку. Спочатку вважатимемо, що поверхня із торців є відкритою – тобто тиск зовні і всередині поверхні однаковий. Такою поверхнею буде катеноїд (рис. 1, а), як поверхня нульової середньої кривини (або мінімальною поверхнею). Далі вважатимемо, що поверхня із торців герметично закрита. Будемо поступово «накачувати» повітря всередину одержаної ємності. В результаті поверхня трансформується, проходячи через певні проміжні положення (рис. 1, б – рис. 1, е). При цьому її середня кривина зростатиме по мірі збільшення тиску всередині одержаної ємності.

В просторовому випадку згадані поверхні обертання сталої середньої кривини мають вигляд [6], наведений на рис. 2.

Наведений приклад ілюструє той факт, що поверхня з більшою середньою кривиною теоретично має витримати більший тиск. Хоча таке збільшення тиску завжди обмежене механічними властивостями міцності матеріалу, з якого виготовлена пневматична поверхня обертання. Але наведені «класичні» поверхні сталої середньої кривини мають форми, не завжди зручні для конструювання пневматичних виробів. У більшості випадків зазначеним виробам на практиці бажано надати форму фасонних (у частковому випадку – гофрованих) поверхонь обертання, де зусилля спрямовані вздовж їх осей обертання.

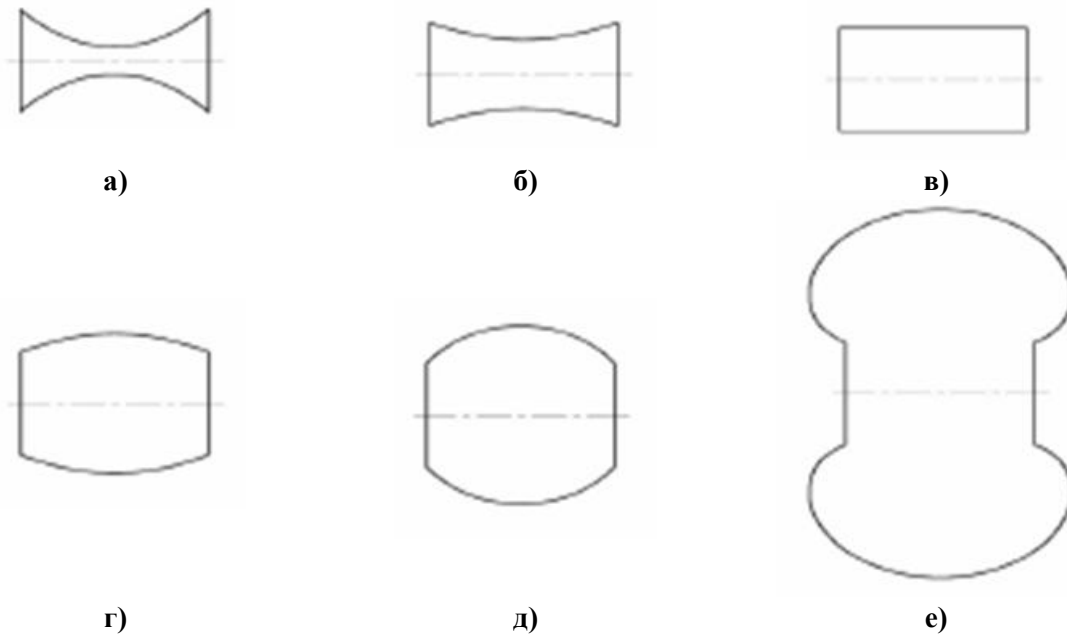


Рис. 1. Форми поверхонь обертання сталої середньої кривини, які розподіляють об'єми середовища на дві частини: а – катеноїд; б – ундулоїд; в – циліндр; г – ундулоїд; д – сфера; е – нодоїд

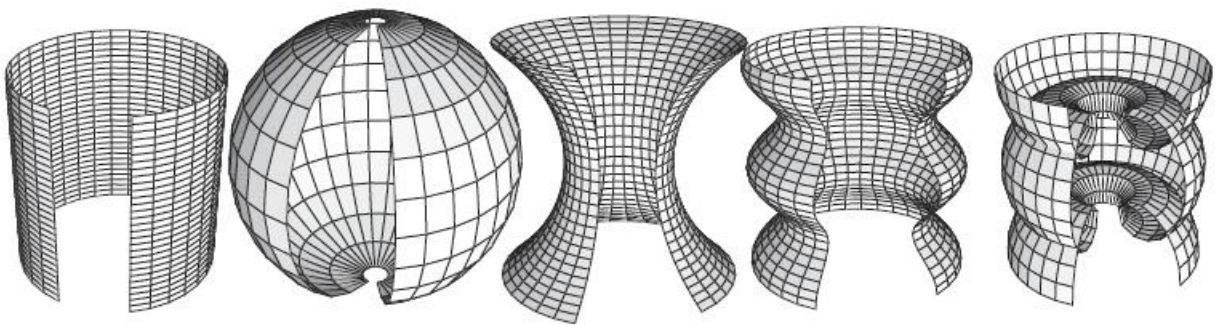


Рис. 2. Вигляд поверхонь обертання сталої середньої кривини (зліва направо): циліндр, сфера, катеноїд, ундулоїд і нодоїд

Тому більш прийнятними для конструкцій пневматичних пристроїв будуть поверхні обертання, середня кривина яких змінюється вздовж їх осей за наперед заданим законом. Звідси постає задача визначити приклади фасонних поверхонь обертання, у якої середня кривина змінюється вздовж осі згідно наперед заданого закону. І які реально можна використати на практиці. Крім того, для функціонування виробу в умовах його навантаження зусиллями вздовж осі, поверхню виробу необхідно зміцнити (армувати) шляхом намотування нитки, виготовлену, наприклад, з кевлару. Для цього необхідно описати множину геодезичних кривих на фасонній поверхні обертання як геометричну модель намотки нитки.

В даній роботі наукову проблему складає сукупність діалектично складних практичних питань, пов'язаних з визначенням відповідності між геометричною формою і міцністю пневматичних гумових поверхонь (виробів). Обране у якості основи досліджень геометричне поняття середньої кривини поверхні має доповнити існуючі знання або прикладні методи у науці і потребує додаткових подальших досліджень. Таким чином, буде актуальною проблема розрахунку фасонних поверхонь обертання зі змінною за певним законом вздовж осі обертання середньою кривиною з урахуванням зміцнення цих поверхонь шляхом геодезичного намотування.

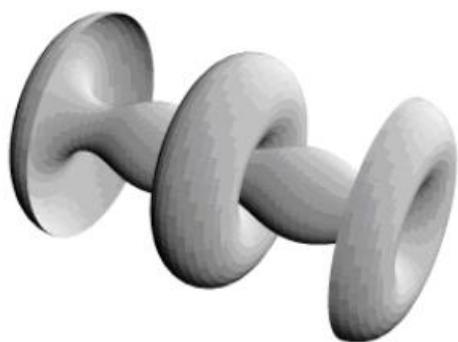
2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Стаття присвячена геометричному моделюванню пневматичних поверхонь і геодезичних кривих на них. Тому далі присвятимо огляд літератури спорідненим способам «конструювання» пневматичних поверхонь (обертання) шляхом визначення значень середніх кривин цих поверхонь. Крім того, наведемо можливі впровадження пневматичних поверхонь.

У роботі [7] показано, що у поверхні обертання сталої середньої кривини меридіаном буде траєкторія першого фокуса еліпса, утворена при його коченні по осі обертання. В результаті одержимо криву під назвою ундулоїд. Другим можливим меридіаном буде траєкторія другого фокуса, утворена гіперболою при її коченні по осі обертання. В результаті одержимо другу криву під назвою нодоїд. Недолік такого графічного підходу до профілювання меридіанів полягає у необхідності додаткового обчислення функції зміни середньої кривини. Робота [8] присвячена опису та побудові поверхонь обертання, у яких середня кривина змінюється вздовж осі обертання за неперервною періодичною функцією $H(s)$ з періодом L . Доведено, що функція $H(s)$ буде описом середньої кривини періодичної поверхні обертання S з періодом L тоді, і лише тоді, коли вона

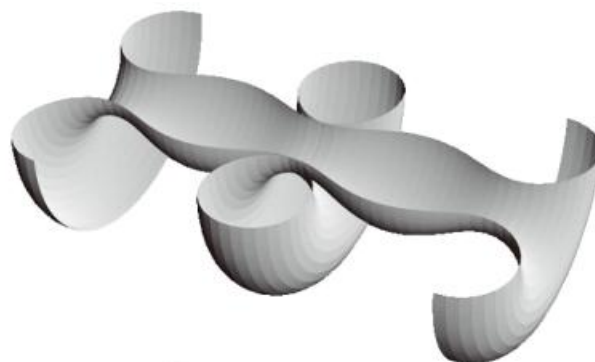
задовольнятиме умовам:
$$\frac{\int \cos \eta(u) du}{\sin \eta(L)} = \frac{\int \sin \eta(u) du}{1 - \cos \eta(L)}$$
; де $\eta(u) = 2 \int H(s) ds$. На рис. 3

та рис. 4 наведено прилад поверхні обертання, у якої $H(s) = 1,2 \cos(s)$. До недоліків такого підходу слід віднести його обмеженість стосовно використання негладких функцій у описі $H(s)$.



а)

Рис. 3. Зовнішній вигляд поверхні, у якої закон зміни середньої кривини $H=1,2 \cos(s)$



б)

Рис. 4. Розрізана вздовж осі поверхня, у якої закон зміни середньої кривини $H=1,2 \cos(s)$

Робота [9] присвячена конструюванню граної поверхні (умовно) сталої середньої кривини, яка буде дискретним аналогом поверхні обертання. Поверхня утворюється шляхом побудови в еліптичній області траєкторій математичного більярда. Для цього необхідно змоделювати математичний більярд в еліпсі (рис. 5, а), потім з'єднати точки на еліпсі з фокусом, і нарешті «розгорнути» одержані трикутники у пряму осі обертання зі збереженням форми трикутників (рис. 5, б). На завершення необхідно «дискретно» (з кроком по куту) обертати твірну ломану навколо цієї обраної осі. В результаті має утворитися грана поверхня сталої середньої кривини. До недоліків такого підходу слід віднести складність аналітичних операцій для його реалізації. Ці операції слід підкріпити програмними продуктами.

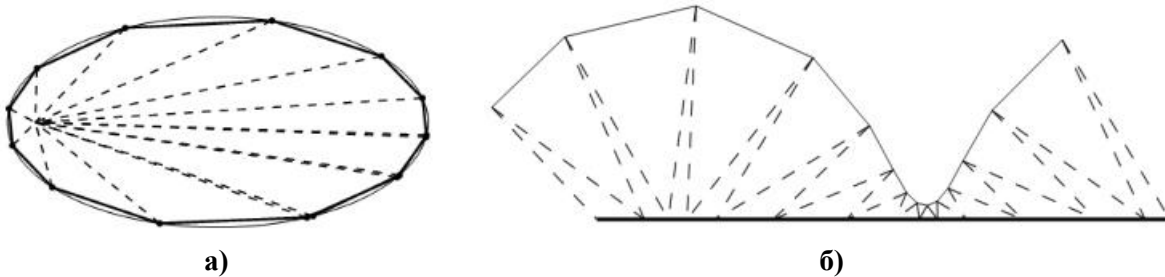


Рис. 5. Математичний більярд в еліпсі: а – більярд в еліпсі; б – «розгортка» більярду в еліпсі як твірна поверхні обертання

В роботі [10] досліджуються поверхні, які допускають конформну параметризацію лінії кривини ізотермічні поверхні. Розглянуто перетворення Дарбу ізотермічних поверхонь, які підкоряються принципу перестановлюваності: для двох різних спектральних параметрів відповідні перетворення мають загальне перетворення, яке можна обчислити алгебраїчно. До недоліків слід віднести складність конформної параметризації лінії кривини поверхні. В роботі [11] наведено дослідження ергономічних пневматичних матраців у стосовно впливу його форми на вирівнювання хребта. Була розроблена нова пневматична пружина змінної жорсткості та проведені експерименти для аналізу його механічних властивостей і факторів впливу. Початкову жорсткість, об'єм і монтажну висоту можна передбачити за допомогою геометричних параметрів і початкового внутрішнього тиску. Але в роботі відсутнє програмне забезпечення діалогу для знаходження параметрів пристрою. В роботі [12] надано чисельне рішення для характеристики деформації пневморесори сильфонного типу для автомобільної підвіски. Структура оболонки моделюється як практично нерозтяжна мембрана, яка не має жорсткості на вигин. На структуру впливає тільки пневматично-пружна деформація за рахунок стисливості повітря під тиском. Для перевірки виконується кінцево-елементне моделювання пристрою стосовно чутливості сильфонів пневматичної підвіски до динамічних навантажень. До недоліків слід віднести не чітке формулювання причино-наслідкових параметрів деформації пневморесори сильфонного типу. В роботі [13] наведено метод побудови апроксимації трикутної сітки до поверхні постійної середньої кривизни шляхом мінімізації дискретизованої площі поверхні з фіксованим об'ємом та фіксованими граничними кривими. Ключова ідея полягає в процедурі оптимізації, де функціонал площі поверхні замінюється функціоналом енергії за методом найменших квадратів. Об'єм, визначений користувачем, вважається параметром керування формою, і оскільки обмеження об'єму не обов'язково точно задовольняти, то його розглядають як додаткове рівняння в системі найменших квадратів. Але в роботі відсутні необхідні оцінки точності обчислень площі поверхні. В роботі [14] досліджуються штучні пневматичні м'язи, які були винайдені для ортопедії. М'язи складаються з надувної камери (пузиря) всередині плетеної сітки. Коли внутрішній міхур відчуває тиск і розширюється, геометрична сітка утворює радіальне розширення в лінійному зрізі. Досліджується вибір кута плетіння, який утворюється між поздовжньою віссю сітки та волокнами сітки. До недоліків слід віднести відсутність порівнянь варіантів геометричних форм надувної камери (пузиря) та плетеної сітки. В роботі [15] Розроблено пневматичні захвати (штучні кінцівки) для роботів. Захвати Dexterous є ефективними, але надто коштовні, вони недостатньо міцні для промислової експлуатації. Досліджуються принципи м'якої робототехніки та дизайн недорогих захватів, здатних захоплювати широкий діапазон об'єктів без пот-

реби у складних схемах управління. М'яка природа пневматичних захватів робить їх кращими для роботи з крихкими та делікатними предметами, ніж традиційні жорсткі захвати. Але в роботі відсутній аналіз конструкцій пневматичних захватів для роботів. Робота [16] присвячена темі енергозбереження для промислових пневматичних систем приводу шляхом повторного використання відпрацьованого повітря на основі еластичного накопичувача постійного тиску. Використовуючи гіперпружні механічні властивості гуми створено накопичувач енергії постійного тиску. Для перевірки ефективності енергозбереження використано побудовано випробувальний стенд. Де з'ясовано, що ефективність енергозбереження становить 54,1 % за заданих умов роботи. До недоліків слід віднести відсутність аналізу можливих геометричних форм еластичного накопичувача.

У роботі [17] вивчаються різновиди поверхонь обертання з постійним значенням середньої кривини. Це так звані як поверхні Делоне. А також поверхні обертання Вілмора. Наведено декілька фізичних моделей поверхонь Делоне, які є недуплоїдними поверхнями. Досліджено поверхні обертання Вілмора, які мають багато застосувань у реальному світі, наприклад, у галузі еластичних біологічних мембран. До недоліків слід віднести відсутність графічних зображень недуплоїдних поверхонь. У роботі [18] наведено графічне представлення деяких поверхонь постійної середньої кривини. Цікаві форми та складні структури таких поверхонь отримані з використанням комп'ютерної програми Mathematica. До недоліків слід віднести несистемну параметризацію поверхонь. У роботі [19] досліджено пневматичний штучний м'яз у формі тонкого волокна, який може генерувати скорочувальні рухи при симуляції. Пристрій заснований на технології пневматичного накачування газу і складається з еластомірного міхура, який обгорнутий плетеною втулкою. Плетіння скорочується і передає радіально розширення в поздовжнє звуження через зміну кута обплетення рукава в результаті накачування повітря. Досліджено жорсткість нитки, діаметр нитки, діаметр міхура та твердість міхура. Результати цінні для проектування та розробки волоконних пневматичних приводів. До недоліків слід віднести недостатнє пояснення кінематики скорочувальних рухів при симуляції пневматичного штучного м'язу. У роботі [20] представлено метод моделювання дискретних поверхонь постійної середньої кривизни, які часто виникають у природі і затребувані в архітектурі та інших інженерних впровадженнях. Метод здатний моделювання зазначені поверхні з фіксованими або вільними межами і є надійним щодо якості входної сітки та змін топології. До недоліків слід віднести відсутність відповідного програмного забезпечення. У роботі [21] розглянуто трикутні апроксимації Безье до поверхонь постійної середньої кривини. Надано метод генерації поліноміальних наближень поверхні постійної середньої кривини із заданою межею. Як недолік слід відзначити відсутність прикладів поліноміальних наближень поверхні постійної середньої кривини. У роботі [22] досліджено питання впливу геометрії штучного сечового міхура на пневматичні штучні м'язи. Представлено модельні та експериментальні дані щодо властивостей активації штучних м'язів сумісно із змінним попереднім натягом сечового міхура та товщиною стінки. До недоліків слід віднести відсутність досліджень залежності геометрії штучного сечового міхура від форми пневматичних штучних м'язів.

В Україні дослідженням властивостей середніх кривин поверхонь та реалізації їх на практиці, присвячені роботи професора Пилипаки С. Ф. та його учнів. В роботі [23] наведено опис класу поверхонь (обертання), у яких середня кривина меридіана за значеннями буде близькою до сталої величини. Якщо кривина мери-

діана змінюється за законом $H = \frac{d + 2r \cos u}{2r(d + r \cos u)}$, то поверхня складатиметься із си-

стеми співвісних ділянок. Тут u – параметр, r – радіус дуги твірної тора, d – відстань від центра кола дуги до осі обертання поверхні в цілому. Отже, зазначена формула з параметрами d і r дозволяє визначити сім'ю поверхонь з «майже» нульовими середніми кривинами. В роботі [24] унаочнюється клас узагальнених поверхонь обертання (рис. 6), у яких значення $H(u)$ середньої кривини вздовж осі залишаються близькими до нуля. Розглянуті поверхні можуть скласти основу нових конструкцій пневматичного обладнання.

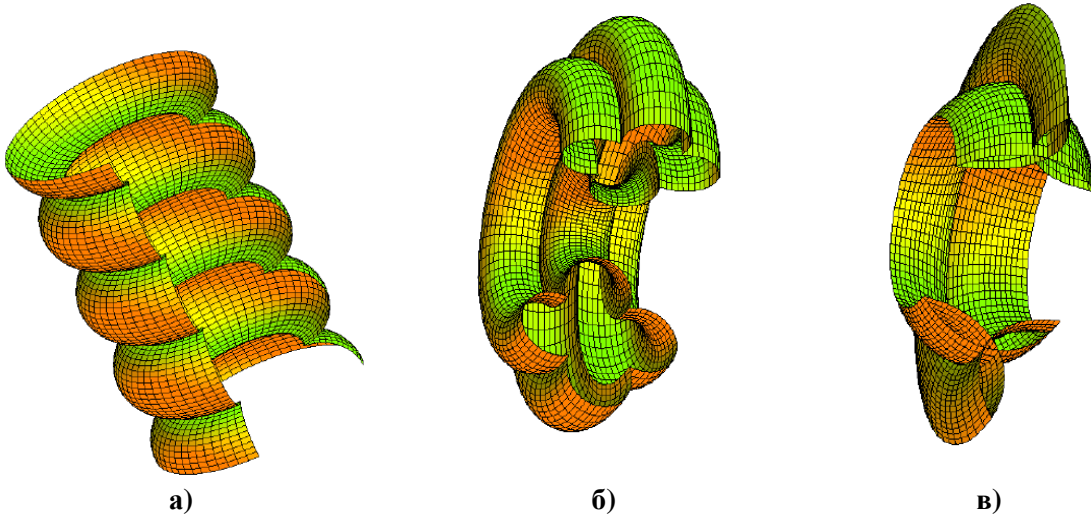


Рис. 6 Узагальнені поверхні обертання, де кривина меридіана змінюється за законом $H = \frac{d + 2r \cos u}{2r(d + r \cos u)}$; а – $r=1, d=7$; б – $r=1,5, d=5$; в – $r=0,8, d=9$

Проведений огляд відомих результатів стосовно визначення поверхонь зі змінної вздовж осі середньою кривиною показав відсутність інженерних підходів до опису та побудови відповідних поверхонь обертання із зазначеними властивостями. Проведений мета-аналіз вказує на відсутність результатів стосовно алгоритмічної реалізації побудови пневматичних поверхонь. У явному вигляді відсутні графічні побудови, призначені для зміцнення одержаних поверхонь.

Таким чином, ще не вирішеною частиною проблеми розрахунків пневматичного спорядження є розвиток обчислень на базі поняття середньої кривини поверхонь, а також визначення розташування геодезичних ліній на зазначених поверхнях. Запропонована стаття базується на результатах робіт авторів [25, 26], одержаних в Національному університеті цивільного захисту України (м. Харків). В наданій роботі удосконалено алгоритмічні складові розрахунку геометричної форми сім'ї меридіанів гумової пневматичної фасонної поверхні обертання залежно від функції зміни середньої кривини вздовж осі цієї поверхні, а також проілюстровано розташування на фасонній поверхні геодезичних ліній.

3. Мета та завдання дослідження

Метою дослідження є розробка способу визначення форм меридіанів фасонних поверхонь обертання, у яких середня кривина змінюється вздовж осі за наперед заданим законом. Для зміцнення одержаних поверхонь необхідно розрахувати траєкторії намотування нитки по геодезичним кривим цих поверхонь.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні завдання:

- описати меридіани поверхонь обертання шляхом розв’язання прямої і оберненої задач;
- побудувати фасону поверхню обертання з намоткою по геодезичним з урахуванням кривини меридіана;
- визначити геодезичну намотку на гофрований поверхні на випадок меридіана пилкоподібної форми.

4. Матеріали та методи дослідження

Об’єктом досліджень є розвиток технології розрахунку пневматичного обладнання для аварійно-рятувальних служб у вигляді фасонних поверхонь обертання, виготовлених з надміцної гумової плівки. З метою зміцнення робочої частини обладнання здійснюється її зміцнення (армування) шляхом намотуванням кевларової нитки. Тобто в роботі розглядається геометричне моделювання гумових фасонних поверхонь обертання та їх зміцнення намотуванням нитки по геодезичних лініях цих поверхонь.

Предметом досліджень є розробка способу розрахунку геометричних форм меридіанів фасонних поверхонь обертання залежно від функції зміни середньої кривини вздовж осі, та поєднання його з методикою геодезичної намотки ниткою.

Гіпотеза досліджень пов’язана з особливостями поверхонь сталої середньої кривини. Їх характерні відмінності базуються на фундаментальній теоремі Пуассона-Лапласа, згідно з якою середня кривина поверхні розділу двох врівноважених фізичних середовищ пропорційна різниці значень тисків у цих середовищах. Отже, варіюючи середню кривину поверхні, можна обирати величину тиску, яку витримає пневматичний виріб. Побудову геодезичної намотки ниткою на гофрований поверхні узагальнено на випадок меридіана пилкоподібної форми.

Значення досліджень для практики полягає у забезпеченні раціонального розрахунку пневматичних виробів (підйомників, ресор, амортизаторів, тощо), призначених для застосування при виконанні аварійно-рятувальних робіт. В даній роботі проведено розрахунок пневматичного обладнання на основі існуючого феномену середньої кривини пневматичних поверхонь. А саме таких, для яких характерною є їх стала (тобто незмінна за значенням в часі) середня кривина. Якщо такі поверхні використати в конструкціях пневматичного обладнання, то всі ділянки виявляться однаково напруженими – тобто рівно ймовірними щодо їх руйнування. Ці унікальні властивості поверхонь сталої середньої кривини пропонується використовувати при конструюванні робочих поверхонь пневматичних виробів (гумових підйомників або амортизаторів). Крім цього в даній роботі в якості математичного апарату досліджень обрано натуральні рівняння кривих. В якості програмного забезпечення використовується математичний процесор Maple, здатний оперувати з описами геометричних об’єктів на рівні аналітичних виразів.

5. Визначення форм меридіанів фасонних поверхонь обертання, зміцнених намотуванням нитки

5.1. Опис меридіанів поверхонь обертання шляхом розв’язання прямої і оберненої задач

Постановка прямої задачі профілювання поверхні обертання змінної середньої кривини полягає у такому. Нехай за допомогою двох функцій $f(u)$ і $g(u)$ задано поверхню обертання, описану рівнянням:

$$S(u, v) = \{g(u), f(u)\cos v, f(u)\sin v\}. \quad (1)$$

Відомо [3], що середня кривина вздовж осі цієї поверхні визначається за допомогою співвідношення:

$$H(f, g) = \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{f' \sqrt{f'^2 + g'^2}} + \frac{f'g'' - f''g'}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} \right). \quad (2)$$

Необхідно побудувати фасонну поверхню обертання зі змінною уздовж осі кривиною її меридіана залежно від функцій $f(u)$ і $g(u)$.

Для пояснення розглянемо ряд прикладів.

Приклад 1. Нехай $f(u) = 5 + \cos u$ і $g(u) = \frac{u}{3}$. Середня кривина вздовж осі поверхні обертання обчислювалася за формулою (2):

$$H = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10 - 9\cos^2 u} (10 + 27\cos u)}{300 - 540\cos^2 u + 243\cos^4 u + 100\cos u - 180\cos^3 u + 81\cos^5 u}. \quad (3)$$

На рис. 7 зображено шукану поверхню обертання (тут і далі з умовним вирізом) та графік зміни середньої кривини вздовж її осі.

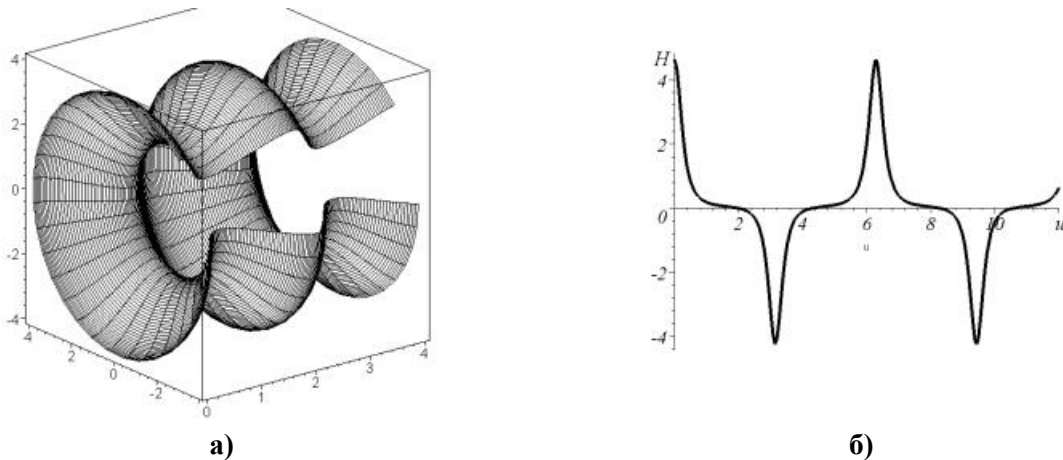


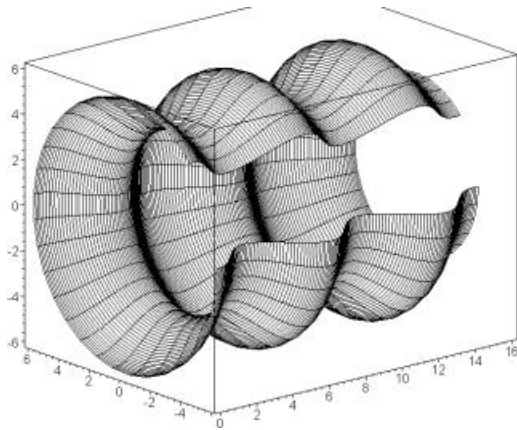
Рис. 7. Шукана поверхня обертання: а – зображення шуканої поверхні; б – графік зміни середньої кривини вздовж осі поверхні

На рис. 7 спостерігаємо велику амплітуду значень графіка зміни середньої кривини вздовж осі поверхні.

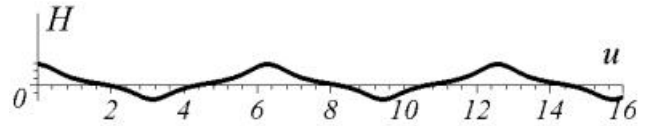
Приклад 2. Нехай $f(u) = 5 + \cos u$ і $g(u) = u$. Середня кривина поверхні вздовж її осі обчислюється за формулою:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{2 + 5\cos u}{(5 + \cos u)(-2\cos^2 u)\sqrt{2 - \cos^2 u}}. \quad (4)$$

На рис. 8 зображено шукану поверхню обертання та графік зміни середньої кривини вздовж її осі.



а)



б)

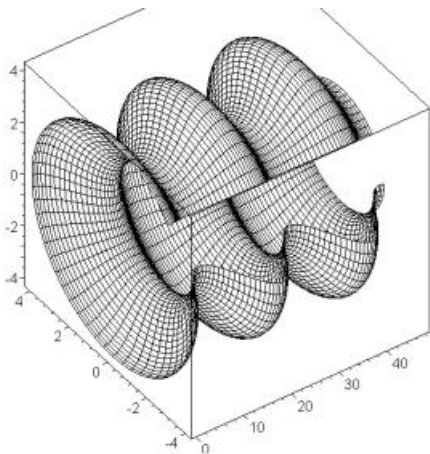
Рис. 8. Шукана поверхня обертання: а – зображення шуканої поверхні; б – графік зміни середньої кривини вздовж її осі

На рис. 8 спостерігаємо незначну амплітуду значень графіка зміни середньої кривини вздовж осі поверхні.

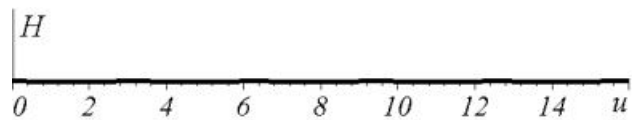
Приклад 3. Нехай $f(u) = \pi + \cos u$ і $g(u) = 3u$. Середня кривина вздовж осі поверхні обчислювалася за формулою:

$$H = -\frac{3}{2} \frac{10 + \pi \cos u}{(\pi + \cos u)(-10 + \cos^2 u) \sqrt{10 - \cos^2 u}}. \quad (5)$$

На рис. 9 зображено шукану поверхню обертання та графік зміни середньої кривини вздовж її осі.



а)



б)

Рис. 9. Шукана поверхня обертання: а – зображення шуканої поверхні; б – графік зміни середньої кривини вздовж осі поверхні

На рис. 9 спостерігаємо практично постійні значення графіка зміни середньої кривини вздовж осі поверхні.

Отже, розв'язання прямої задачі зводиться до підбору (гладких) функцій $f(u)$ і $g(u)$ за критерієм, який погано формалізується. А саме: необхідно цим підбором забезпечити «фасонність» поверхні обертання, зручної для застосування у пневматичних виробках.

Особливість досліджень полягає у тому, що візуально практично не можливо

відрізнити геометричні форми поверхонь, наведених вище на рис. 7 – рис. 9. Але, при цьому, графіки зміни середньої кривини вздовж осі поверхні можуть суттєво відрізнятись. До того ж амплітуда графіка зміни середньої кривини вздовж осі поверхні має бути без «пікових» сплесків, які негативно впливатимуть на функціонування пневматичного виробу в цілому. Отже, наочні зображення одержаних поверхонь різні – але подібні за виглядом «вигинів», що ускладнює обирання прийняттого для експлуатації варіанту.

Тому на відміну від прямої задачі для практичних реалізацій слід розробити спосіб розв'язання оберненої задачі – тобто визначення меридіана поверхні обертання, зручної для експлуатації на практиці. А саме, необхідно за заданою функцією зміни вздовж осі середньої кривини поверхні обертання визначити опис (тобто рівняння) меридіана.

Далі для розв'язання оберненої задачі розглянемо питання параметризації кривої лінії за допомогою натурального параметра. Натуральні рівняння зручно використовувати при певних розрахунках опису та зображень кривих. Такі рівняння описують кривину кривої залежно від її натурального параметра s . Цей параметр визначає довжину даної кривої, починаючи з її деякої «нульової» точки. Натуральне рівняння кривої має вигляд:

$$\frac{1}{R} = f(s), \quad (6)$$

де R – радіус кола, дотичного до (гладкої) кривої в певній її точці, а функція $f(s)$ визначає закон зміни кривини лінії (тобто величини $k=1/R$) залежно від натурального параметра s . За визначенням класичною кривиною дуги кривої у точці M називається величина:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \quad (7)$$

де λ – кут між дотичними в точках M і M_{Δ} , а Δs – довжина дуги MM_{Δ} . З використанням похідної формулу (7) можна записати як

$$k = |\dot{\alpha}|, \quad (8)$$

де $\alpha(s)$ – кут повороту дотичної у точці M , що залежить від шляху, пройденого по кривій, $\dot{\alpha}$ – похідна функції $\alpha(s)$ по параметру s .

Рівняння (8) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням. Дійсно, з рівняння $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$ визначається функція:

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0, \quad (9)$$

За допомогою функції (9) обчислюється кут нахилу дотичної залежно від довжини дуги. Тоді відповідно до відомих залежностей маємо тотожності:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{і} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha. \quad (10)$$

І параметризацію кривої можна задати у вигляді:

$$x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0; \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0, \quad (11)$$

або, з урахуванням виразу (9), рівняння шуканої кривої матиме вигляд:

$$x(s) = \int_0^s \cos \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + x_0; \quad y(s) = \int_0^s \sin \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + y_0, \quad (12)$$

Легко переконатися в тому, що обертання кривої спричиняє зміну у формулах (12) постійної α_0 , а паралельний перенос кривої пов'язаний зі зміною параметрів x_0 і y_0 . Рівність цих констант нулю визначає розташування кривої так, що початкова точка для відліку дуги буде розташована на початку координат, а додатний напрямок дотичної у ній збігається з додатним напрямком осі Ox .

Для побудови кривих доцільно застосовувати складену `maple`-програму (рис. 10). Тут через **kap** позначено значення кривини кривої; через **a** і **b** – межі зміни параметра довжини дуги; систему диференціальних рівнянь Френе позначено через **sys**; розв'язок цієї системи позначено через **ans**, а підготовлену для візуалізації інформацію позначено, як **pic**.

```

profil := proc(kap, a, b)
local sys, p, ics, p1:
sys:= diff(alpha(s),s) = kap(s)^w,
diff(x(s),s) = cos(alpha(s)),
diff(y(s),s) = sin(alpha(s)):
krai:= x(0)=0,y(0)=0, alpha(0)=0;
ans:=dsolve({sys,krai},{x(s),y(s),alpha(s)},
type=numeric);
pic:=odeplot(ans,[x(s),y(s)], s=a..b,
numpoints=12000,thickness=2,color=black):
display(pic,scaling=constrained);
end:

```

Рис. 10. Фрагмент програми для побудови кривих за їх кривинами

Звертатися до процедури-функції, що на рис. 10, треба так (як приклад):

```
kap := s -> 1 + 5*cos(s)^2; profil(kap, 0, 6*Pi);
```

У результаті в системі декартових координат $\{x, y\}$ буде знайдено опис меридіану поверхні обертання, що відповідатиме натуральному параметру s кривини **kap** кривої.

Далі розглянемо опис меридіану поверхні обертання з використанням системи диференціальних рівнянь Френе. Нехай кривина вздовж осі поверхні обертання змінюється за законом $k(s)$. Тоді кут між дотичною і віссю Ox можна

обчислити за допомогою виразу $\theta = \int_0^t k(s) ds$. Система диференціальних рівнянь

Френе має вигляд:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \cos\left(\int_0^t k(s)ds\right); \frac{d}{dt}y(t) = \sin\left(\int_0^t k(s)ds\right). \quad (13)$$

Розв'язання системи (13) матиме вигляд:

$$x(t) = \int \cos\left(\int_0^t k(s)ds\right)dt; y(t) = \int \sin\left(\int_0^t k(s)ds\right)dt. \quad (14)$$

Але інтеграли у виразах (14) точно не обчислюються, тому на практиці для побудови кривої буде застосовано метод розкладення підінтегральних функцій у ряд Фур'є.

Для підінтегральних функцій:

$$f_x(s) = \cos\left(\int_0^t k(s)ds\right) \text{ або } f_y(s) = \sin\left(\int_0^t k(s)ds\right) \quad (15)$$

ряд Фур'є на відрізку $[0 \leq s \leq 2L]$ матиме вигляд:

$$F(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{sn\pi}{L} + b_n \sin \frac{sn\pi}{L} \right), \quad (16)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{s=0}^{2L} f(s)ds;$$

$$a_i = \frac{1}{L} \int_{s=0}^{2L} f(s) \cos \frac{is\pi}{L} ds; \quad (17)$$

$$b_i = \frac{1}{L} \int_{s=0}^{2L} f(s) \sin \frac{is\pi}{L} ds.$$

У виразах (17) замість $f(s)$ необхідно обирати функції $f_x(s)$ або $f_y(s)$ залежно від координати обчислення.

У результаті отримаємо опис меридіану поверхні обертання у аналітичному вигляді:

$$x(t) = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\int_0^t k(s)ds\right)dt \right) + \left(\sum_{n=1}^N b_n \cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \right) dt,$$

$$y(t) = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\int_0^t k(s)ds\right)dt \right) + \left(\sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{\pi nt}{L}\right) \right) dt. \quad (18)$$

Але при практичному застосуванні формули (18) мають надто громіздкий вигляд. Тому користуватися ними доцільно застосовуючи комп'ютерні процесори,

спроможні здійснювати роботу з формулами на аналітичному рівні. Ми використували пакет `maple`.

5.2. Побудова фасонної поверхні обертання з намоткою по геодезичним з урахуванням кривини меридіана

Побудову фасонної поверхні обертання з намоткою по геодезичним залежно від зазначеної функції кривини меридіана будемо розв'язувати у два етапи. Спочатку побудуємо поверхню обертання, у якій середня кривина змінюється вздовж її осі за законом $k(s) = \cos s$.

Система рівнянь Френе у нашому випадку матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \cos(\sin t); \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \sin(\sin t). \end{aligned} \quad (19)$$

Розв'язання системи рівнянь (19) одержимо у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \cos(\sin t) dt + c_1; \\ y(t) &= \int \sin(\sin t) dt + c_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Константи інтегрування можна обрати нульовими. Підінтегральні вирази у формулах (20) точно не обчислюються. Тому ми застосуємо розкладання підінтегральних виразів у ряд Фур'є. Шляхом проведення комп'ютерних експериментів показано, що кількість елементів розкладу $N=17$ буде прийнятним для наближення підінтегральних виразів з необхідною точністю. У результаті з використанням формул (18), отримуємо параметричний опис $x=x(t)$, $y=y(t)$ меридіану поверхні обертання (рис. 11), у якій середня кривина змінюється вздовж осі за законом $k(s)=\cos(s)$.

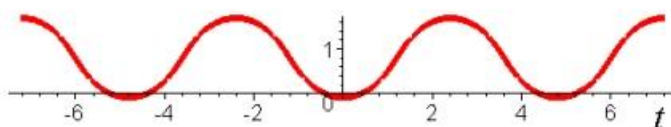


Рис. 11. Меридіан поверхні обертання, у якій середня кривина змінюється вздовж осі за законом $k(s)=\cos(s)$

За умови визначених параметричного опису $\{x=x(t), y=y(t)\}$ меридіану, рівняння поверхні обертання матиме вигляд:

$$S = \{x(u), \sin v(y(u)) + h, \cos v(y(u)) + h\}, \quad (21)$$

де h – величина зміщення меридіана поверхні відносно осі обертання.

На рис. 12 зображено поверхню обертання (з умовним розрізом), у якій середня кривина змінюється вздовж осі за законом $k(s)=\cos(s)$.

На другому етапі досліджень на одержаній поверхні для її зміцнення слід побудувати множини геодезичних кривих. Опис геодезичних кривих на фасонних

поверхнях обертання будемо здійснювати за допомогою складання та розв'язання системи диференціальних рівнянь. Використання формул Фур'є дозволяє визначати аналітичні вирази опису фасонних поверхонь і геодезичних.

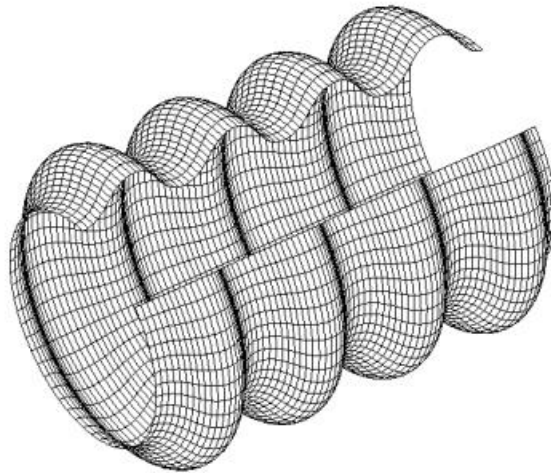


Рис. 12. Поверхня з визначеним меридіаном, де середня кривина змінюється вздовж осі за законом $k(s)=\cos(s)$

Розв'язання системи диференціальних рівнянь з належними крайовими умовами дозволяє описати відповідну геодезичну криву на фасонній поверхні обертання. Але одержані аналітичні залежності мають громіздкий вигляд і тут не наводяться. Детально про це сказано в роботі [17]. Переконайтеся у громіздкості аналітичних виразів можна за допомогою фрагмента `table` програми, наведеної далі в цьому підрозділі.

На рис. 13 в якості прикладу зображено різновиди проєкцій одержаної фасонної поверхні обертання залежно від обраних початкових умов. Проілюстровано розташування першої сім'ї геодезичних ліній на пневматичній поверхні. Розташування другої сім'ї геодезичних ліній буде симетричним стосовно кута обертання осі поверхні.

Одержану фасонну поверхню умовно назвемо «жорсткою», зважаючи на геометричну форму її згинів. Саме згини такої форми мають пневматичні амортизатори автомобілів та пневматичні домкрати у автомобільних майстернях.

Далі розглянемо фасонну поверхню обертання з геодезичною намоткою залежно від функції $k(s)=\cos s + \frac{1}{3}\cos(s/3)$ зміни кривини меридіана. На рис. 14 зображено графік функції $k(s)$.

Повторюючи ідею попереднього прикладу наведемо опис та побудову поверхні обертання, у якій середня кривина змінюється вздовж її осі за обраним законом. В цьому випадку система рівнянь Френе матиме вигляд:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \cos(\sin(t) + \sin(t/3)); \quad \frac{d}{dt}y(t) = \sin(\sin(t) + \sin(t/3)). \quad (22)$$

Розв'язання системи рівнянь (22) має вигляд:

$$x(t) = \int \cos(\sin(t) + \sin(t/3)) dt + c_1; \quad y(t) = \int \sin(\sin(t) + \sin(t/3)) dt + c_2. \quad (23)$$

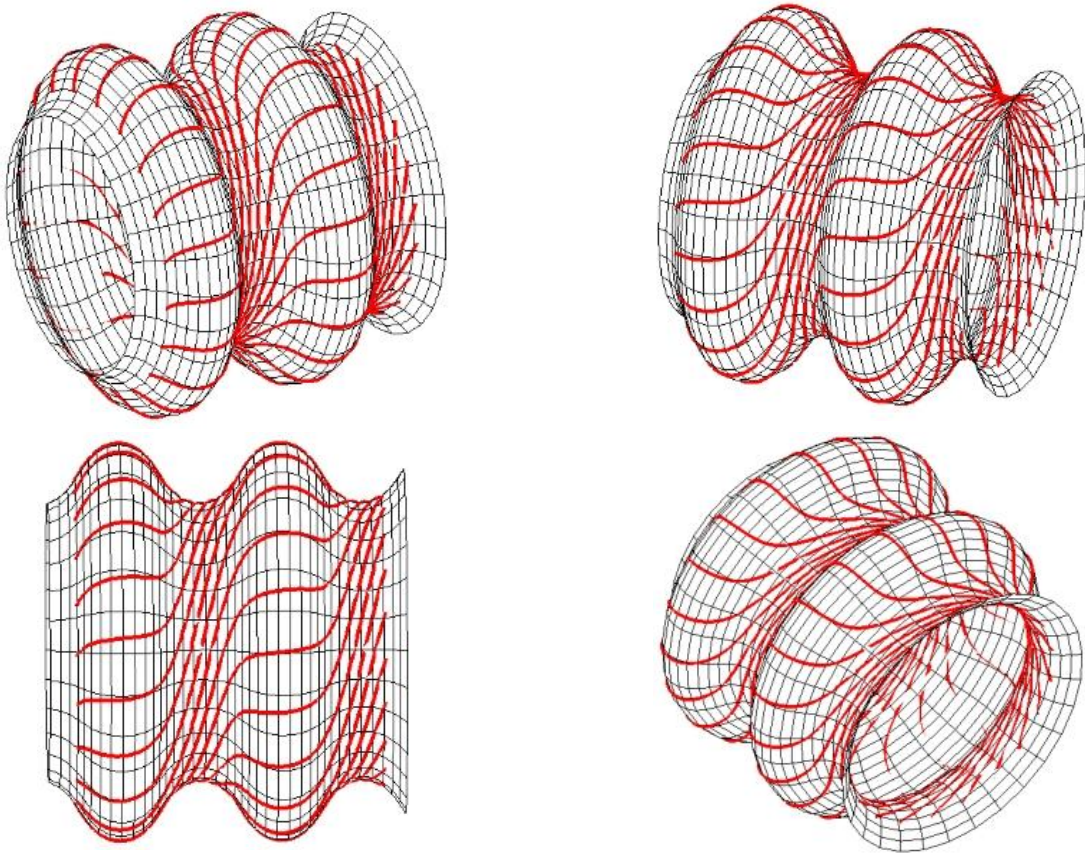


Рис. 13. Зображення знайденої поверхні обертання з сім'єю геодезичних на ній

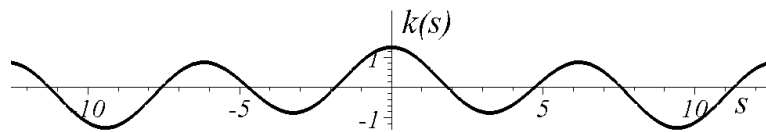


Рис. 14. Графік функції $k(s)$

Константи інтегрування оберемо нульовими. Підінтегральні вирази точно не обчислюються, тому здійснимо їх розклад у ряд Фур'є. При $N=17$ одержимо необхідні наближення підінтегральних виразів у формулі (23).

Використовуючи формули (18) отримуємо параметричний опис $x=x(t)$, $y=y(t)$ меридіану поверхні обертання, в якій середня кривина змінюється вздовж осі за законом $k(s) = \cos s + \frac{1}{3} \cos(s/3)$. Функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ мають громіздкий вигляд і тут не наводяться. На практиці вони реалізуються машинними кодами програми Maple. На рис. 15 наведено зображення меридіану, описаного параметричним рівнянням $\{ x=x(t); y=y(t) \}$.

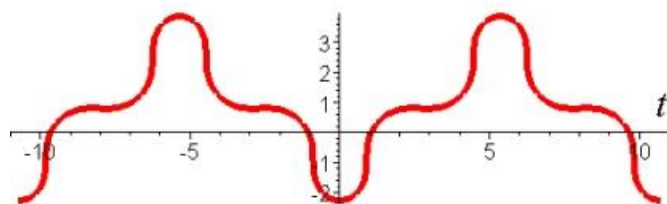


Рис. 15. Зображення меридіану поверхні обертання, в якій середня кривина змінюється за законом $k(s) = \cos s + \frac{1}{3} \cos(s/3)$

На рис. 16 зображено (з розрізом) пневматичну поверхню з визначеним меридіаном.

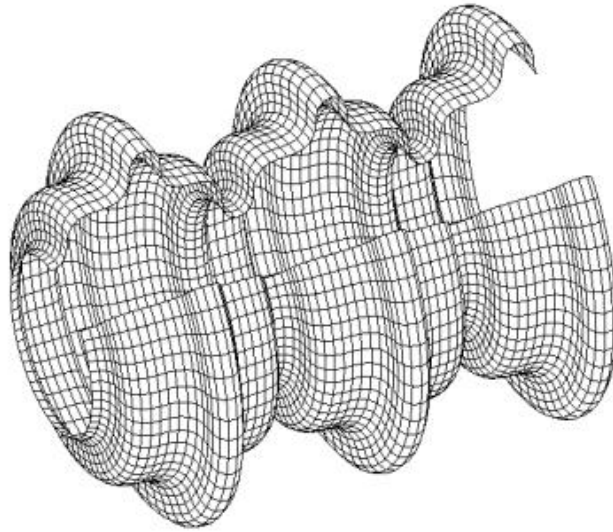


Рис. 16. Пневматична поверхня з визначеним меридіаном

Далі розглянемо геодезичне намотування поверхонь обертання, у яких кривина меридіана змінюється за законом $k(s) = \cos s + \frac{1}{3} \cos(s/3)$. Для цього необхідно звернутися до складеної Maple-програми [17]. Варіант її реалізації наведено на рис.17.

Наведена програма дозволяє розв'язати систему диференціальних рівнянь і одержати описи двох сімей геодезичних. Їх описи будуть представлені у вигляді кодів мови Maple. В програмі вони не розкриті з причини громіздкості їх виразів. Система диференціальних рівнянь розв'язується залежно від обраних початкових умов, у результаті чого одержуємо зображення геодезичних на поверхні обертання.

Зазначимо, що перед застосуванням фрагмента програми з рис. 17, необхідно визначити параметричні рівняння $\{x(u), y(u)\}$ меридіана поверхні обертання:

$$[x(u), (y(u) + h) \cdot \cos(v), (y(u) + h) \cdot \sin(v)],$$

де h – величина зміщення меридіана поверхні відносно осі обертання.

На рис. 18 а, б наведено одержані геодезичні на фасонній поверхні залежно від різних початкових умов.

Універсальність запропонованої методики «конструювання» геодезичних кривих на фасонних поверхнях полягає у тому, що зазначене криві можна будувати лише на зарання обраних фрагментах поверхні. Саме тих, які схильні до руйнування. Фасонну поверхню такого виду умовно будемо називати «м'якою», зважаючи на геометричну форму її згинів. Отже, в роботі розглядалося два варіанти дії геометричної форми фасонних поверхонь, умовно розділених на «жорстку» і «м'яку». Перша призначена для застосування в звичайних транспортних засобах, а друга – в транспортних засобах спеціального призначення. Наприклад, в причепах для перевозки вибухонебезпечних виробів, для яких «м'якість» підвіски забезпечить проходимость по шляхам зі складним рельєфом.

```

Xu :=[diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)]:
Xv := [diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)]:
dp := proc(X,Y) X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3] end:
E := simplify(dp(Xu,Xu)):
F := simplify(dp(Xu,Xv)):
G := simplify(dp(Xv,Xv)):
zna := E*G - F*F:
Eu:=diff(E,u): Ev:=diff(E,v):
Fu:=diff(F,u): Fv:=diff(F,v):
Gu:=diff(G,u): Gv:=diff(G,v):
# система диференціальних рівнянь
eq1 := diff(u(t),t$2) + subs( {u=u(t),v=v(t)},
(G*Eu-F*(2*Fu-Ev))/(2*zna) )*diff(u(t),t)^2
+ subs( {u=u(t),v=v(t)}, (G*Ev-F*Gu) / zna )
*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)
+ subs( {u=u(t),v=v(t)}, (G*(2*Fv-Gu)-F*Gv) /
(2*zna) )*diff(v(t),t)^2=0:
eq2:=diff(v(t),t$2) + subs( {u=u(t),v=v(t)},
(E*(2*Fu-Ev)-F*Eu) / (2*zna) )*diff(u(t),t)^2
+ subs( {u=u(t),v=v(t)}, (E*Gu-F*Ev) / (zna) )
*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)
+ subs( {u=u(t),v=v(t)}, (E*Gv-F*(2*Fv-Gu)) /
(2*zna) )*diff(v(t),t)^2=0:
sys:=eq1, eq2:

N := 40:
for i from 0 to N do
vbeg := i*2*Pi/N:
ubeg := 1: dubeg := 2.2: dvbeg := 1:
desys := dsolve({sys, u(0)=ubeg, v(0)=vbeg,
D(u)(0)=dubeg, D(v)(0)=dvbeg}, {u(t),v(t)}, type=numeric,
output=listprocedure);
u1 := subs(desys, u(t));
v1 := subs(desys, v(t));
geo1[i] := spacecurve(subs(u='u1'(t),
v='v1'(t), X), t=0..13, color=red, thickness=4,numpoints=200):
geo2[i] := spacecurve(subs(u='u1'(t),
v='-v1'(t), X), t=0..13, color=green, thickness=4,numpoints=200):
end:
plotX := plot3d(X,u=0..35,v=0..2*Pi, grid=[50, 40], color=white):
display({seq(geo1[i], i=0..N), seq(geo2[i], i=0..N), plotX},
scaling=constrained, orientation=[-65, 60]);

```

Рис. 17. Фрагмент maple-програми побудови геодезичних на фасонній поверхні

5.3. Визначення геодезичної намотки на гофрований поверхні на випадок меридіана пилкоподібної форми

Далі розглянемо опис і побудову зображення гофрованої поверхні, зміцненої намотуванням нитки. Нехай меридіан поверхні обертання описано рівнянням:

$$z = p + \frac{\arccos(\cos(u/q))}{q}, \quad (24)$$

форма якого при $p=9$ і $q=1$ має пилкоподібний вигляд (рис. 19).

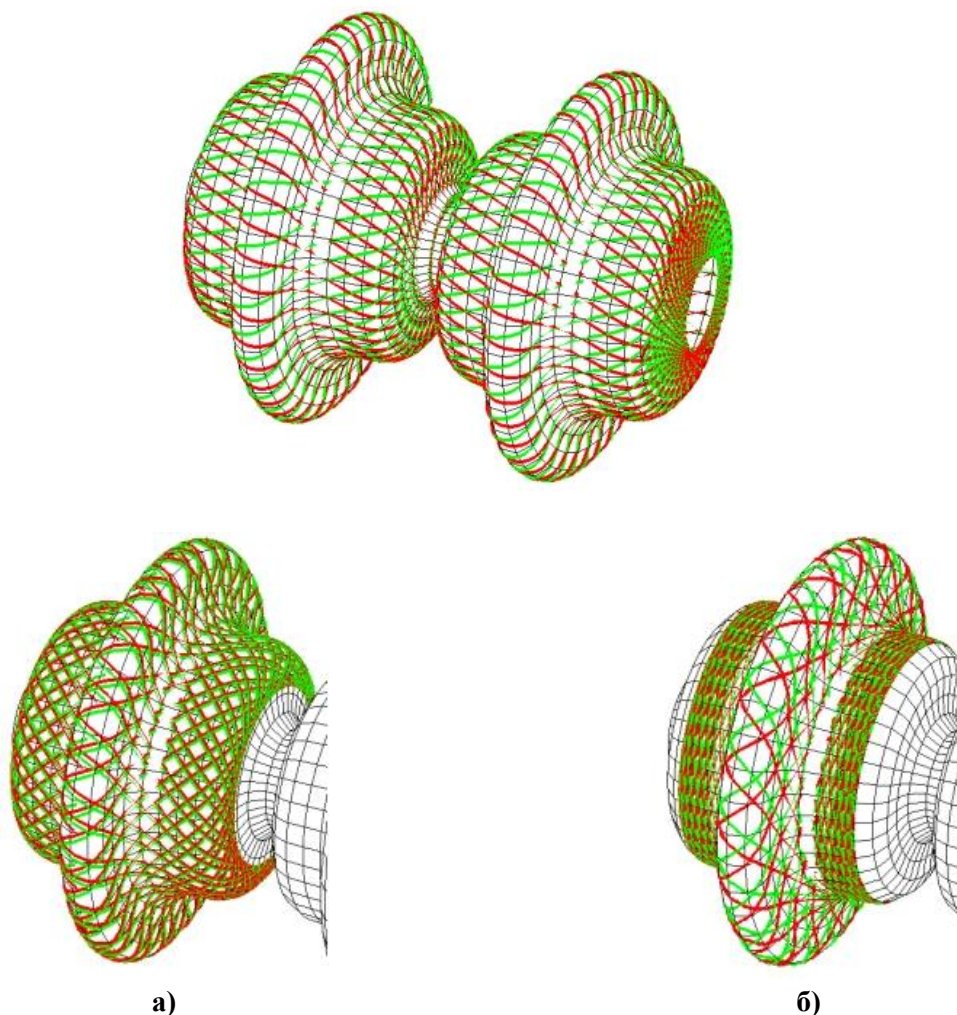


Рис. 18. Геодезичні на фасонній поверхні: а – на всій поверхні обертання; б – на частині поверхні обертання

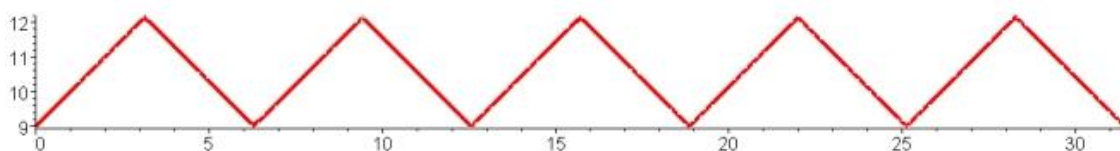


Рис. 19. Пилкоподібна форма меридіана

Опис гофрованої поверхні як поверхні обертання визначається формулами:

$$\left(u, p + \frac{\arccos(\cos(u/q))}{q} \cos v, \frac{\arccos(\cos(u/q))}{q} \sin v \right), \quad (25)$$

де $p=9$ і $q=1$.

Для складання системи диференціальних рівнянь геодезичних для цієї поверхні обертання необхідно визначити коефіцієнти квадратичної форми

$$E = \frac{q^4 + 1}{q^4}; F = 0; G = \frac{(pq + \arccos(\cos(u/q)))^2}{q^2}. \quad (26)$$

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь для опису геодезичних ліній на гофрованій поверхні:

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = \frac{1}{2} \frac{9 + \arccos(\cos(u(t))) \sin(u(t))}{\sqrt{1 - \cos^2 u(t)}} \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} v(t) = - \frac{2 \sin(u(t))}{(9 + \arccos(\cos(u(t)))) \sqrt{1 - \cos^2 u(t)}} \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} v(t). \quad (27)$$

На рис. 20 наведено зображення, одержане в результаті розв'язання системи рівнянь залежно від початкових умов.

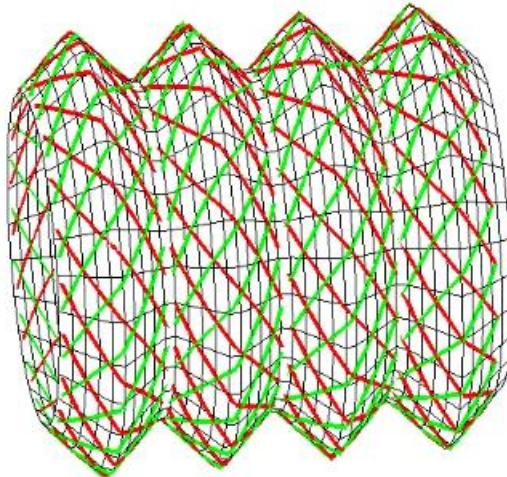


Рис. 20. Приклад геодезичного намотування гофрованої поверхні

На рис. 21 наведено приклад зміни форми розтягнення геодезичних залежно від величини сили стискування гофрованої поверхні (в режимі пневматичної поверхні).

В перспективі дослідження в цьому напрямку доцільно продовжити з метою виявлення формальних ознак існування сім'ї геодезичних кривих на знайдений гофрованій поверхні.

6. Обговорення результатів дослідження форм меридіанів поверхонь обертання, зміцнених намотуванням нитки

Отримані результати пояснюються причино-наслідковим зв'язком між геометричними формами пневматичних поверхонь і їх фізичними властивостями. В даній роботі увагу приділено поверхням, для яких характерним фактором є їх середня кривина. Якщо такі поверхні використати в конструкціях пневматичного обладнання, то всі ділянки виявляться рівно напруженими – тобто рівно ймовірними щодо їх руйнування в процесі експлуатації.

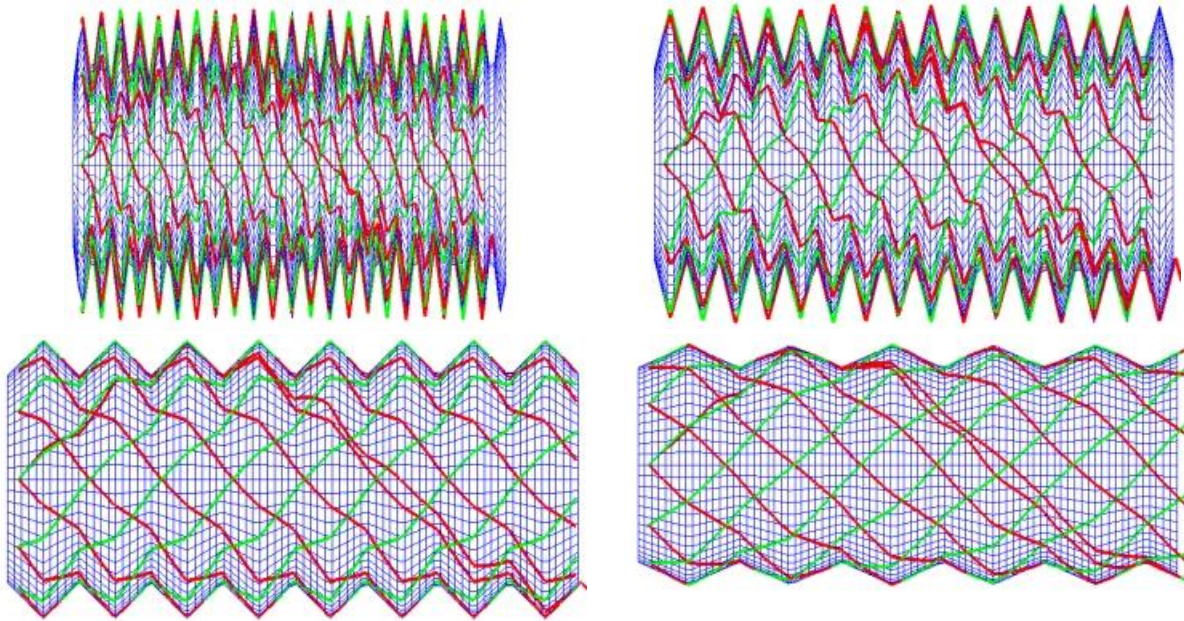


Рис. 21. Зміна форми геодезичних залежно від стиснення гофрованої поверхні

Особливості запропонованого методу і отриманих результатів полягають у реалізації основної властивості поверхонь сталої середньої кривини. Згадана властивість полягає у тому, що середня кривина поверхні розділу двох врівноважених фізичних середовищ пропорційна різниці значень тисків у їх суміжних порожнинах. Отже, варіюючи середньою кривиною поверхні, можна обирати величину тиску, яку теоретично має витримати пневматичний виріб. В порівнянні з існуючими методами розрахунку цей результат надається майже «даром». Залишається лише врахувати обмеження при збільшенні тиску. Обмеження пов'язані з механічними властивостями міцності матеріалу, з якого виготовлена робоча пневматична поверхня.

Наведеним дослідженням притаманні певні обмеження, пов'язані з необхідністю «стиківки» розрахованої геометричної форми пневматичної поверхні з множиною геодезичних кривих для її зміцнення намоткою нитки. Тобто для функціонування виробу в умовах навантаження зусиллями вздовж осі, поверхню виробу доцільно зміцнити (армувати) шляхом намотування нитки. Для цього як геометричну модель намотки нитки необхідно розрахувати множину геодезичних кривих, узгоджених з формою фасонної поверхні обертання. Це тема майбутніх досліджень.

Недоліки напрямку проведеного дослідження можуть виявитися у випадках принципової неможливості погодити утворення сім'ї геодезичних кривих на знайдений фасонній поверхні. В перспективі дослідження в цьому напрямку доцільно продовжити з метою виявлення формальних ознак існування сім'ї геодезичних кривих на знайдений фасонній поверхні.

Розвиток проведених досліджень можливо здійснити у напрямку створення програмних систем автоматизованого розрахунку фасонних (і гофрованих) пневматичних поверхонь, поєднаних з розрахунком сім'ї відповідних геодезичних кривих.

7. Висновки

1. В результаті обчислень було визначено форми меридіана фасонної поверхні обертання шляхом розв'язання оберненої задачі. На відміну від

розв'язання прямої задачі, яка зводиться до підбору двох функцій $f(u)$ і $g(u)$ за критерієм, який погано формалізується. А саме: необхідно забезпечити «фасонність» поверхні обертання, зручної для застосування у пневматичних виробках. Тому на відміну від оберненої задачі в роботі наведено спосіб розв'язання прямої задачі – тобто визначення меридіана поверхні обертання, зручної для експлуатації на практиці. За заданою функцією зміни вздовж осі середньої кривини поверхні обертання в роботі визначено опис (тобто рівняння) меридіана. Особливістю роботи полягає у застосуванні натуральних рівнянь при розрахунках опису та зображення кривих.

2. Розроблений спосіб дозволив розрахувати геодезичну намотку для забезпечення міцності фасонної поверхні обертання залежно від функції зміни кривини меридіана. Це вдалося зробити завдяки вдалому розв'язку системи диференціальних рівнянь Френе. Оскільки інтеграли у одержаних виразах (14) точно не обчислюються, тому на практиці для побудови кривої в роботі застосовано метод розкладення підінтегральних функцій у ряд Фур'є. У результаті отримано параметричний опис меридіану поверхні обертання (18). В роботі розглядалося два варіанти дії геометричної форми фасонних поверхонь, умовно розділених на «жорстку» і «м'яку». Перша призначена для застосування в звичайних транспортних засобах, а друга – в транспортних засобах спеціального призначення. Наприклад, в причепах для перевезення вибухонебезпечних виробів, для яких «м'якість» підвіски забезпечить проходимость по шляхам зі складним рельєфом.

3. Побудову геодезичної намотки ниткою в роботі узагальнено на випадок гофрованої поверхні з меридіаном пілкоподібної форми. Для цього одержано рівняння (25) гофрованої поверхні як поверхні обертання. Для складання системи диференціальних рівнянь геодезичних ліній для цієї поверхні обертання було визначено коефіцієнти квадратичної форми (26). В результаті одержано систему диференціальних рівнянь (27) для опису геодезичних ліній. На завершення запропоновано тарле- програму розв'язання системи рівнянь геодезичних кривих залежно від крайових умов. Розв'язки ілюстровано зображеннями геодезичних ліній на гофрованій поверхні, що доказує коректність одержаного розв'язку.

Література

1. Гідравлічне та пневматичне аварійно-рятувальне обладнання з приналежностями. Weber-hydraulik Ukraine, 2020. 41 с. URL: <https://www.weber-rescue.com.ua/wp-content/uploads/2020/10/Katalog-2020.pdf>
2. Пожежна та аварійно-рятувальна техніка. Історія, сьогодення, минуле : монографія / О. М. Ларін та ін. Харків : НУЦЗУ, 2005. 160 с.
3. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків : Основа, 1995. 304 с.
4. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи: навч. посіб. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
5. Малишко П. Е., Орлов М. Є. Конструювання балонів для зберігання стисненого газу. Збірник тез доповідей: 36. тез доп. 76-ї всеукр. науково-практ. студент. онлайн-конф. «Наук. здобутки студентів у дослідж. техн. та біоенерг. систем природокористування: конструювання та дизайн». Ф-т, м. Київ, 26–27 квітня 2023. С. 63–64.
6. Mladenov I. M., Hadzhilazova M. T. Geometry of the anisotropic minimal

surfaces. *Analele Universitatii «Ovidius» Constanta – Seria Matematica*. 2012. Vol. 20(2). P. 79–88. doi: 10.2478/v10309-012-0042-3

7. Perdomo O. M. The treadmillsled of a curve. *arXivLabs*. 17 May 2011. URL: <https://arxiv.org/abs/1105.3460v1>

8. Kenmotsu K. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal*. 1980. Vol. 32. № 1. P. 147–153. doi: 10.2748/tmj/1178229688

9. Hoffmann T. Discrete Rotational CMC Surfaces and the Elliptic Billiard. In: Hege, HC., Polthier, K. (eds) *Mathematical Visualization*. Springer. 1998. P. 117–124. doi: 10.1007/978-3-662-03567-2_9

10. Cho J., Leschke K., Ogata Y. Generalised Bianchi permutability for isothermic surfaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*. 2022. Vol. 61. P. 799–829. doi: 10.1007/s10455-022-09833-5

11. Chao Y., Shen L. M., Liu M. P. Mechanical characteristic and analytical model of novel air spring for ergonomic mattress. *Mechanics & Industry*. 2021. Vol. 22(37). doi: 10.1051/meca/2021035

12. de Melo F., Pereira A., Morais A. The Simulation of an Automotive Air Spring Suspension Using a Pseudo-Dynamic Procedure. *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8. № 7. P. 1049. doi: 10.3390/app8071049

13. Renka R. J. A Simple and Efficient Method for Modeling Constant Mean Curvature Surfaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2015. Vol. 37. № 4. P. A2076–A2099. doi: 10.1137/140972275

14. Pneumatic Artificial Muscles. URL: <https://softroboticstoolkit.com/book/export/html/168891>

15. Al-Ibadi A., Nefti-Meziani S., Davis S. Active Soft End Effectors for Efficient Grasping and Safe Handling. *IEEE Access*. 2018. Vol. 6. P. 23591–23601. doi: 10.1109/access.2018.2829351

16. Du H., Liu W., Bian X., Xiong W. Energy-Saving for Industrial Pneumatic Actuation Systems by Exhausted Air Reuse Based on a Constant Pressure Elastic Accumulator. *Sustainability*. 2022. Vol. 14. № 6. P. 3535. doi: 10.3390/su14063535

17. Paragoda T. Constant Mean Curvature Surfaces of Revolution versus Willmore Surfaces of Revolution: A Comparative Study with Physical Applications. Texas Tech University, 2014. 42 p.

18. Ciric M. Notes on constant mean curvature surfaces and their graphical presentation. *Filomat*. 2009. Vol. 23. № 2. P. 97–107. doi: 10.2298/fil0902097c

19. Hoque M. A., Petersen E., Fang X. Effect of Material Properties on Fiber-Shaped Pneumatic Actuators Performance. *Actuators*. 2023. Vol. 12. № 3. P. 129. doi: 10.3390/act12030129

20. Pan H., Choi Y.-K., Liu Y., Hu W., Du Q., Polthier K., et al. Robust modeling of constant mean curvature surfaces. *ACM Transactions on Graphics*. 2012. Vol. 31. № 4. P. 1–11. doi: 10.1145/2185520.2185581

21. Arnal A., Lluch A., Monterde J. Triangular Brezner approximations to Constant Mean Curvature surfaces Conference: Computational Science – ICCS 2008, 8th International Conference, Kraków, Poland, June 23–25. 2008. Proceedings, Part II. doi: 10.1007/978-3-540-69387-1_11

22. Ball E., Garcia E. Effects of Bladder Geometry in Pneumatic Artificial Muscles. *Journal of Medical Devices*. 2016. Vol. 10. № 4. doi: 10.1115/1.4033325

23. Пилипака С., Коровіна І. Конструювання поверхонь обертання сталої середньої кривини. Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції

«Перспективи розвитку агропромислового комплексу в Поліському регіоні України». Ніжин: Міланік. 2010. С. 35–43.

24. Руденко С. Ю. Поверхні обертання, у яких значення середньої кривини близькі до нуля. Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: Будівельник. 2013. Вип. 91. С. 240–244.

25. Руденко С. Ю. Геометричне моделювання фасонних поверхонь обертання, зміцнених намотуванням нитки : автореф. дис. канд. техн. наук : 05.01.01. Київ, 2013. 24 с.

26. Куценко Л., Руденко С. Поверхні обертання зі змінної уздовж осі кривиною меридіанів та їх зміцнення шляхом намотування кевларової нитки. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Луцьк: ЛДТУ. 2011. Вип. 6. С. 148–153.

L. Kutsenko, DSc, Professor, Professor of the Department

S. Rudenko, PhD, Lecturer of the Department

A. Kalynovskyi, PhD, Associate Professor, Head of Department

O. Polivanov, PhD, Lecturer of the Department

O. Sukharkova, Lecturer of the Department

National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

GEOMETRIC MODELING OF PNEUMATIC SHAPED SURFACES OF ROTATION, REINFORCED BY WINDING THREAD

A scheme is proposed for calculating the geometric forms of the family of meridians of a rubber pneumatic shaped surface of rotation depending on the function of changing the average curvature along the axis of this surface. It is proposed to strengthen the resulting shaped surface of rotation by winding the thread along the geodesic curves of the found surface. A method has been developed for determining the approximate shape of the elements of the family of meridians of the pneumatic surface of rotation. In addition, constructed surfaces of revolution, strengthened by winding threads along their geodesic lines, depending on the function of changing the curvature of the meridian. As a result, images of geodesic curves on shaped surfaces of revolution were obtained. The construction of a geodesic thread winding on a corrugated surface is generalized for the case of a sawtooth-shaped meridian. It is advisable to model a pneumatic surface based on calculating its average curvature. Since the value of the average curvature of the interface between two balanced physical media is proportional to the difference in pressure values in these media. By varying the average curvature of the surface, you can choose the amount of pressure that the pneumatic product will withstand. Approximate descriptions of the shape of the meridian of the shaped surface of revolution are obtained by solving the direct and inverse problems. The parameters of geodesic winding are calculated depending on the given meridian curvature function. The construction of geodesic winding of a thread on a corrugated surface is generalized for the case of a sawtooth-shaped meridian. For practice, the studies conducted are useful and important, since they provide calculations of rational pneumatic products intended for use during emergency rescue operations.

Keywords: meridian of the surface of revolution, average curvature of the surface, corrugated surface of revolution, reinforcement by thread winding

References

1. Hidravlichne ta pnevmatychne avariino-riatuvalne obladdannia z prynalezhnostiamy. WEBER-HYDRAULIK UKRAINE, 41. Available at: <https://www.weber-rescue.com.ua/wp-content/uploads/2020/10/Katalog-2020.pdf>

2. Larin, O. (2005). Pozhezhna ta avariino-riatuvalna tekhnika. Istoriia, sohodennia, mynule : monohrafiia. Kharkiv : NUCDU, 160.

3. Borysenko, O. (1995). Dyferentsialna heometriia i topolohiia. Kharkiv: Osnova, 304.

4. Zadachyn, V., Koniushenko, I. (2014). Chyselni metody: navch. posib.

Kharkiv: KhNEU im. S. Kuznetsia, 180.

5. Malyshko, P., Orlov, M. (2023). Konstruiuvannia baloniv dlia zberihannia stysnenoho hazu. Zbirnyk tez dopovidei: Zb. tez dop. 76-yi vseukr. naukovo-prakt. student. onlain-konf. «Nauk. zdobutky studentiv u doslidzh. tekhn. ta bioenerh. system pryrodokorystuvannia: konstruiuvannia ta dyzain». F-t, m. Kyiv, 63–64.

6. Mladenov, I., Hadzhilazova, M. (2012). Geometry of the anisotropic minimal surfaces. *Analele Universitatii «Ovidius» Constanta – Seria Matematica*, 20(2), 79–88. doi: 10.2478/v10309-012-0042-3

7. Perdomo, O. (2011). The treadmill sled of a curve. arXivLabs. Available at: <https://arxiv.org/abs/1105.3460v1>

8. Kenmotsu, K. (1980). Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal*, 32, 1, 147–153. doi: 10.2748/tmj/1178229688

9. Hoffmann, T. (1998). Discrete Rotational CMC Surfaces and the Elliptic Billiard. In: Hege, HC., Polthier, K. (eds) *Mathematical Visualization*. Springer, 117–124. doi: 10.1007/978-3-662-03567-2_9

10. Cho, J., Leschke, K., Ogata, Y. (2022). Generalised Bianchi permutability for isothermic surfaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 61, 799–829. doi: 10.1007/s10455-022-09833-5

11. Chao, Y., Shen, L., Liu, M. (2021). Mechanical characteristic and analytical model of novel air spring for ergonomic mattress. *Mechanics & Industry*, 22, 37. doi: 10.1051/meca/2021035

12. de Melo, F., Pereira, A., Morais, A. (2018). The Simulation of an Automotive Air Spring Suspension Using a Pseudo-Dynamic Procedure. *Applied Sciences*, 8, 7, 1049. doi: 10.3390/app8071049

13. Renka, R. (2015). A Simple and Efficient Method for Modeling Constant Mean Curvature Surfaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37, 4, A2076–A2099. doi: 10.1137/140972275

14. Pneumatic Artificial Muscles. Available at: <https://softroboticstoolkit.com/book/export/html/168891>

15. Al-Ibadi, A., Nefti-Meziani, S., Davis, S. (2018). Active Soft End Effectors for Efficient Grasping and Safe Handling. *IEEE Access*, 6, 23591–23601. doi: 10.1109/access.2018.2829351

16. Du, H., Liu, W., Bian, X., Xiong, W. (2022). Energy-Saving for Industrial Pneumatic Actuation Systems by Exhausted Air Reuse Based on a Constant Pressure Elastic Accumulator. *Sustainability*, 14, 6, 3535. doi: 10.3390/su14063535

17. Paragoda, T. (2014). Constant Mean Curvature Surfaces of Revolution versus Willmore Surfaces of Revolution: A Comparative Study with Physical Applications. *Texas Tech University*, 42.

18. Ciric, M. (2009). Notes on constant mean curvature surfaces and their graphical presentation. *Filomat*, 23, 2, 97–107. doi: 10.2298/fil0902097c

19. Hoque, M., Petersen, E., Fang, X. (2023). Effect of Material Properties on Fiber-Shaped Pneumatic Actuators Performance. *Actuators*, 12, 3, 129. doi: 10.3390/act12030129

20. Pan, H., Choi, Y.-K., Liu, Y., Hu, W., Du, Q., Polthier, K., et al. (2012). Robust modeling of constant mean curvature surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 31, 4, 1–11. doi: 10.1145/2185520.2185581

21. Arnal, A., Lluch, A., Monterde, J. (2008). Triangular Brezner approximations to Constant Mean Curvature surfaces Conference: Computational Science – ICCS 2008,

8th International Conference, Kraków, Poland, Proceedings, Part II. doi: 10.1007/978-3-540-69387-1_11

22. Ball, E., Garcia, E. (2016). Effects of Bladder Geometry in Pneumatic Artificial Muscles. *Journal of Medical Devices*, 10, 4. doi: 10.1115/1.4033325

23. Pylypaka, S., Korovina, I. (2010). Konstruiuvannia poverkhon obertannia staloi serednoi kryvyny. *Materialy III Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Perspektyvy rozvytku ahropromysloвого комплексу v Poliskomu rehioni Ukrainy»*. Nizhyn: Milanik, 35–43.

24. Rudenko, S. (2013). Poverkhni obertannia, u yakykh znachennia serednoi kryvyny blyzki do nulia. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. K.: Budivelnyk, 91, 240-244.

25. Rudenko, S. (2013). Heometrychne modeliuвання fasonnykh poverkhon obertannia, zmitsnenykh namotuvanniam nytky: avtoref. dys. kand. tekhn. nauk : 05.01.01. Kyiv, 24.

26. Kutsenko, L. Rudenko, S. (2011). Poverkhni obertannia zi zminnoi uzdovzh osi kryvynoiu merydianiv ta yikh zmitsnennia shliakhom namotuvannia kevlarovoi nytky. *Kompiuterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo*. Lutsk: LDTU, 6, 148–153.

Надійшла до редколегії: 05.03.2024

Прийнята до друку: 11.04.2024