Вычисления во всех случаях были проведены для различных начальных распределений, заданных в точке $s_0 = 0$. Заметим, что выбор начального распределения в точке s_0 не влияет на значения предельных вероятностей исследуемого процесса [3].

В таблице приведены значения вектора $\vec{\sigma}$ для различных видов возмущений.

Характер возмущения	σ_1	σ_2	σ_3
Линейные	0,013439	0,001344	0,012095
Степенные	0,005689	0,000652	0,005036
Сгущающиеся к точке t_0	0,004135	0,000133	0,004001
Возникающие в случайные моменты времени	0,030110	0,009125	0,020985

Анализируя результаты, полученные в пунктах 1-3, можно сделать следующие выводы. Наименьшие значения вектора отклонений $\vec{\sigma}$ были получены при сгущающихся к концу исследуемого интервала возмущениях. Этому же случаю соответствует самая узкая полоса локализации вероятностей состояний, при этом они изменяются наиболее плавно, однако позже, чем для регулярных возмущений, попадают в σ-окрестность предельного распределения. Хорошие результаты также дает стабилизация процесса регулярными степенными возмущениями. Возмущениям, возникающим в случайные моменты времени, соответствует наихудший вектор $\vec{\sigma}$.

Как видно, каждый из рассмотренных видов возмущений имеет и достоинства, и недостатки. Выбирая на практике способ стабилизации процесса, нужно исходить из того, какую цель желает достичь исследователь: получить в точке t_0 минимальное отклонение вероятностей состояний от теоретических значений или же быстрее “загнать” вероятности состояний процесса в σ-окрестность предельного распределения.

Все вычисления были проведены с помощью пакета программ, разработанного авторами в системе символьной математики Mathematica 4©.

Литература: 1. *Дикарев В.А.* Фокусирующие факторы. Базисы фокусировки и стабилизации // Радиоэлектроника и информатика. 1998. №2(3). С.50-53. 2. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Стабилизация марковского процесса в окрестности распределения, заданного на конечном временном промежутке // Доп. НАН України,1999. №8. С.69-73. 3. *Герасин С.Н.* Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем. Харьков. Изд-во ХТУРЭ, 1999. 212 с.

Поступила в редколлегию 15.12.2000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: hm@kture.ua, тел: (0572)40—93—72 (раб.), (0572)72—12—38 (дом.).

Гибкина Надежда Валентиновна, инженер-стажер кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14.

Лизгин Валерий Анатольевич, начальник отдела АСУ АО “Меркурий”. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория неоднородных структур, программирование. Адрес: Россия, 357100, Карачаево-Черкесская республика, г. Черкесск, ул. Кавказская, 126, тел.: (87822)511-51.

УДК 514.753

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ ЗАЩИТЫ

АНТОШКИН А.А., КОМЯК В.М., РОМАНОВА Т.Е., ШЕХОВЦОВ С.Б.

Исследуются особенности размещения пожарных извещателей в защищаемом помещении. Рассматриваемая прикладная задача сводится к задаче покрытия произвольной двухмерной области кругами заданного радиуса. На основании анализа технологических ограничений задачи строится ее математическая модель.

Эффективность решения задач оптимального управления в технических системах непосредственно связана с разработкой математических методов, позволяющих осуществить выбор рациональной, с точки зрения используемого критерия оптимальности, структуры технической системы. Задачи синтеза оптимальных структур возникают при разработке систем обнаружения и оповещения, одним из классов которых являются системы автоматической противопожарной защиты.

При решении таких задач необходимо учитывать реальные геометрические особенности элементов систем, их тип, количество, параметры размещения и т.п. Поэтому целесообразно преобразование информации о различных по своей физической природе составных элементах технических систем в единый вид геометрической информации. Это позволяет осуществить формализацию и решение задач синтеза оптимальных структур технических систем различного функционального назначения с использованием моделей и методов геометрического проектирования [1].

Задача покрытия защищаемого помещения областями, контролируемыми пожарными извещателями, является задачей синтеза оптимальной структуры системы автоматической противопожарной защиты. Она относится к классу задач геометрического покрытия некоторой области множеством заданных объектов [1].

Рассмотрим задачу размещения пожарных извещателей в следующей постановке. В качестве математических моделей области T_0, подлежащей защите, и области T, контролируемой пожарным извещателем, выбираются точечные множества арифметического евклидового пространства E^2, которые являются φ −объектами [1]. Пусть множество T_0 обладает произвольной пространственной формой, а множество T − круг радиуса R. Необходимо область T_0 покрыть кругами $T_i, i \in I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ радиуса R таким образом, чтобы количество кругов было минимальным и выполнялся ряд специальных ограничений. Заметим, что мощность индексного множества I_n определяется путем оценивания, причем число n заведомо превышает число объектов, необходимое для покрытия заданной области.

Теоретико-множественная модель поставленной задачи имеет вид:

$$T_0 \bigcap \left[\bigcup_{i=1}^{n} T_i \right] = T_0 . \qquad (1)$$

Выражение (1) описывает условие покрытия, при выполнении которого каждая точка области T_0 принадлежит хотя бы одному из объектов T_1, $T_2,\ldots,T_n$.

Математическую модель поставленной задачи можно представить в следующем виде:

определить

$$\underset{Z \in D \subset E^{2n}}{extr}\, \theta(Z_1, Z_2,\ldots, Z_n), \qquad (2)$$

где $Z_i = (x_i, y_i)$ − координаты центра круга $T_i, i \in I_n$ в фиксированной системе координат, совпадающей с собственной системой координат области T_0; $Z = (Z_1, Z_2,\ldots,Z_n)$; $D \subset E^{2n}$ − область допустимых решений. Область D формируется, исходя из условия (1), а также с учетом ряда дополнительных специальных ограничений.

Рассмотрим более подробно каждое из ограничений.

При размещении пожарных извещателей каждая точка защищаемого помещения должна контролироваться хотя бы одним прибором. Далее будем полагать, что в случае возникновения пожара в пределах области T_i, контролируемой пожарным извещателем, вероятность его обнаружения равна единице, т.е. обнаружение − событие достоверное.

В случае, если в проектируемой системе пожарной сигнализации используются безадресные пожарные извещатели, минимальное количество приборов, установленных в одном защищаемом помещении, должно быть не менее двух.

Проектирование схем размещения пожарных извещателей предусматривает соблюдение ряда нормативных размеров. В зависимости от типа выбранного извещателя и высоты защищаемого помещения в нормативной литературе [2] приводятся максимальные расстояния между пожарными извещателями и от пожарного извещателя до стен защищаемого помещения.

Проекция пожарного извещателя на плоскость, которой принадлежит множество T_0, представляет собой круг C^- радиуса r^-, определяемого габаритными размерами пожарного извещателя. Область T_0^- возможного расположения центров покрывающих объектов T_1, $T_2,\ldots,T_n$ с учетом r^- можно описать следующим образом:

$$T_0^- = cl(E^2 \setminus (cl(E^2 \setminus T_0) \oplus C^-)) \ , \qquad (3)$$

где $\oplus$ − операция суммы Минковского; $cl(\cdot)$ − операция топологического замыкания.

Назовем крайними объекты, для которых выполняется условие $T_i \cap frT_0 \neq \varnothing$, $i \in I_n$.

Максимально допустимое расстояние между центрами крайних покрывающих объектов и границей области покрытия T_0 должно быть не более чем r_0^+, где величина r_0^+ определяется нормативной литературой [2] и $r^- < r_0^+ < R$.

Тогда область $T_0^+ \subset E^2$ допустимого расположения центров покрывающих объектов T_1, $T_2,\ldots,T_n$ с учетом r_0^+ можно определить следующим образом:

$$T_0^+ = (cl(E^2 \setminus T_0) \oplus C^+) \cap T_0 \ , \qquad (4)$$

где C^+ − круг радиуса r_0^+.

Пусть

$$T^* = cl(E^2 \setminus T_0) . \qquad (5)$$

Обозначим через $T' \subset E^2$ область, которой могут принадлежать центры крайних объектов, а через $T'' \subset E^2$ − область, которой могут принадлежать центры остальных объектов, принадлежащих области T_0^-. Тогда, учитывая (3), (4), имеем

$$T' = (T_0^+ \cap T_0^-) , \qquad (6)$$

$$T'' = cl(R^2 \setminus (T^* \oplus C^R)) , \qquad (7)$$

где C^R − круг радиуса R.

Очевидно, что $T_0^- \neq T' \cup T''$.

Как известно [3], Φ -функция, описывающая взаимное расположение объектов T_i, T_j, определяется следующим образом:

$\Phi(Z_i, Z_j) > 0$, если $clT_i \cap clT_j = \varnothing$,

$\Phi(Z_i, Z_j) = 0$, если $intT_i \cap intT_j = \varnothing$ и $frT_i \cap frT_j \neq \varnothing$,

$\Phi(Z_i, Z_j) < 0$, если $intT_i \cap intT_j \neq \varnothing$.

Назовем соседними покрывающие объекты T_i, T_j, $i \neq j \in I_n$, для которых значения Φ-функции не положительны, т.е.

$$\Phi(Z_i, Z_j) \leq 0 . \qquad (8)$$

Согласно нормативной литературе [2], максимально допустимое расстояние между центрами соседних покрывающих объектов T_i, T_j должно быть не более чем r^+. Это условие можно задать в виде неравенства

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r^+)^2 \leq 0 .$$

Минимально допустимое расстояние между центрами соседних покрывающих объектов T_i, T_j должно быть не менее чем $2r^-$, т.е.

$$(2r^-)^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 \leq 0 .$$

При этом следует заметить, что $2r^- << r^+ < 2R$.

Таким образом, ограничения на максимальные и минимальные допустимые расстояния между центрами соседних покрывающих объектов T_i, T_j задаются системой неравенств:

$$\begin{cases} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r^+)^2 \leq 0, \\ (2r^-)^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 \leq 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Для всех остальных объектов это условие выполняться не должно.

В пространстве E^{2n} условия принадлежности центров кругов T_1, $T_2, \ldots, T_n$ областям вида (5)-(7) описываются множествами D^*, D', D'', соответственно.

Пусть имеется некоторое множество $D^{***} \subset E^{2n}$ вида:

$$D^{***} = \{Z \in D''' \,|\, \forall (i_k, j_k) \in K_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2r^-, r^+] \cup$$

$$\cup [2R, diam T_0^-]\} ,$$

где K_n – множество пар индексов (i_k, j_k), $i_k \in I_n$, $j_k \in I_n$, $i_k \neq j_k$, $D''' = D' \cup D''$. Очевидно, что мощность множества K_n равна C_n^2. При этом полагаем, что $K_n = A_n \cup B_n$, где $A_n \cap B_n = \varnothing$.

Система (9) в пространстве E^{2n} задает некоторое множество

$$D^{\pm} = \{Z \in D''' \,|\, \forall (i_k, j_k) \in A_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2r^-, r^+]\}.$$

Пусть

$$D^{**} = \{Z \in D''' \,|\, \forall (i_k, j_k) \in B_n, \rho(Z_{i_k}, Z_{j_k}) \in [2R, diam T_0^-]\},$$

т.е. $D^{***} = D^{**} \cup D^{\pm}$.

Таким образом, область допустимых решений можно представить в виде:

$$D = ((D' \cup D'') \cap (D^{\pm} \cup D^{**})) \cup D^* . \qquad (10)$$

Для аналитического описания области допустимых решений $D \subset E^{2n}$ будем использовать понятие структуры неравенств [1,4].

Пусть имеются неравенства $f_i(Z) \leq 0$, $Z = (x_i, y_i)$, $i \in I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ и предикат δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; f_i(Z) \leq 0 \wedge f_j(Z) \leq 0, \\ 0, & \text{если} \;\; f_i(Z) \leq 0 \vee f_j(Z) \leq 0. \end{cases}$$

Упорядоченный набор $F(Z)$ неравенств $f_i(Z) \leq 0$, $i \in I_m$ с предикатом $\delta_{ij} = (f_i(Z) \leq 0, f_j(Z) \leq 0)$, $i, j \in I_m$, заданным в виде симметрической матрицы $\Delta = \left\|\delta_{ij}\right\|_{m \times m}$, называется структурой неравенств и обозначается через $G(F(Z), \Delta, m)$.

Обозначим матрицу $\Delta = \left\|\delta_{ij}\right\|_{m \times m}$ с $\delta_{ij} = 1$, $\forall \; i, j \in I_m$ через Δ^1, а матрицу $\Delta = \left\|\delta_{ij}\right\|_{m \times m}$ с $\delta_{ij} = 0$, $\forall \; i \neq j \in I_m$, $\delta_{ij} = 1$, $i = j \in I_m$ – через Δ^0. Ясно, что структура $G(F(Z), \Delta^1, m)$ является системой неравенств, взятых из данного набора.

Определим операции пересечения и объединения структур неравенств. Пусть даны структуры $G_1(F_1(Z), \Delta_1, k_1)$, $\Delta_1 = \left\|\delta_{ij}^1\right\|_{k_1 \times k_1}$ и $G_2(F_2(Z), \Delta_2, k_2)$, $\Delta_2 = \left\|\delta_{ij}^2\right\|_{k_2 \times k_2}$. Эти структуры описывают множества $D_1, D_2 \in E^{2n}$ соответственно.

Пересечением структур G_1 и G_2 является структура $G^{\cap}(F(Z), \Delta^{\cap}, k)$, которая описывает множество $D_1 \cap D_2$, где $\Delta^{\cap} = \left\|\delta_{ij}^{\cap}\right\|_{k \times k}$, $F(Z) = \{F_1(Z), F_2(Z)\}$, $k = k_1 + k_2$,

$$\delta_{ij}^{\cap} = \begin{cases} \delta_{ij}^1, & \text{если} \;\; i \leq k_1, j \leq k_1; \\ \delta_{i-k_1, j-k_1}^2, & \text{если} \;\; i > k_1, j > k_1, i, j = k_1 + 1, \ldots, k; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Объединением структур является структура $G^{\cup}(F(Z), \Delta^{\cup}, k)$, которая описывает множество $D_1 \cup D_2$, где $\Delta^{\cup} = \left\|\delta_{ij}^{\cup}\right\|_{k \times k}$, $F(Z) = \{F_1(Z), F_2(Z)\}$, $k = k_1 + k_2$,

$$\delta_{ij}^{\cup} = \begin{cases} \delta_{ij}^1, & \text{если} \;\; i \leq k_1, j \leq k_1; \\ \delta_{i-k_1, j-k_1}^2, & \text{если} \;\; i > k_1, j > k_1, i, j = k_1 + 1, \ldots, k; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, структура

$$\begin{aligned}&((G'(F_1(Z),\Delta_1,k_1)\cup G''(F_2(Z),\Delta_2,k_2))\cap\\&\cap(G^{\pm}(F_3(Z),\Delta_3,k_3)\cup G^{**}(F_4(Z),\Delta_4,k_4)))\cup\\&\cup G^{*}(F_5(Z),\Delta_5,k_5)\end{aligned}\qquad(11)$$

описывает область допустимых решений (10), где структуры G', G'', G^*, $G^{\pm}$, G^{**} задают множества D', D'', D^*, $D^{\pm}$, D^{**}, соответственно. При этом

$$G'(F_1(Z),\Delta_1,k_1)=\bigcap_{i=1}^{m'}G_i'(F_{1i}(Z),\Delta_{1i},k_{1i});$$

$$G''(F_2(Z),\Delta_2,k_2)=\bigcap_{i=1}^{m''}G_i''(F_{2i}(Z),\Delta_{2i},k_{2i});$$

$$G^{\pm}(F_3(Z),\Delta_3,k_3)=\bigcap_{(i,j)\in A_n}G_{ij}^{\pm}(F_{3ij}(Z),\Delta_{3ij},k_{3ij});$$

$$G^{**}(F_4(Z),\Delta_4,k_4)=\bigcap_{(i,j)\in B_n}G_{ij}^{**}(F_{4ij}(Z),\Delta_{4ij},k_{4ij});$$

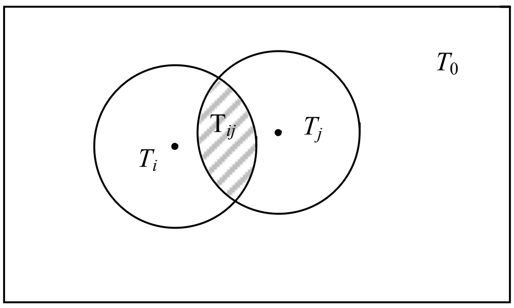
$$G^{*}(F_5(Z),\Delta_5,k_5)=\bigcap_{i=1}^{m^*}G_i^{*}(F_{5i}(Z),\Delta_{5i},k_{5i});$$

$m'+m''+m^*=n$, $m'+m''\geq 2$.

Для определения функции цели поставленной задачи введем некоторое множество вида

$$T_{ij}=T_i\cap T_j. \qquad (12)$$

Множество (12) описывает область взаимного пересечения соседних объектов T_i и T_j при покрытии области T_0 (рисунок).



Взаимное пересечение объектов T_i и T_j

Пусть Ω_{ij} – площадь множества T_{ij}. Тогда при определении $\min\sum_{i\neq j=1}^{n}\Omega_{ij}$ количество покрывающих объектов в общем случае будет стремиться к минимуму.

Это утверждение верно, поскольку в данной постановке $\sum_{i\neq j=1}^{n}\Omega_{ij}$ есть функция, зависящая прямо пропорционально от количества m кругов, покрывающих область T_0, $\Omega_0\leq m\Omega_i$, где $\Omega_i=\pi R^2$ – площадь круга T_i, i=1,..., n; Ω_0 – площадь области T_0.

Формализацию условий покрытия области позволяет осуществить введение специального класса функций, названных ω - функциями [1] вида:

$$\omega(g)=\omega(M_0, M_1, M_2, ..., M_n, P_0, P_1, P_2, ..., P_n), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}g=((S_0\cap(S_1\cup S_2\cup...\cup S_n)), M_0, M_1, M_2, ..., M_n,\\ P_0, P_1, P_2, ..., P_n)=\\ =B(g_0, g_1, g_2, ..., g_n)=g_0*g_1*g_2*...*g_n,\end{aligned}\quad(14)$$

где * – знак композиции отображений, $g_0=(S_0,M_0,P_0)$, $g_i=(S_i,M_i,P_i)$ – геометрическая информация [1] об объектах T_0, T_i, $i\in I_n$; S_0,M_0,P_0, S_i,M_i,P_i, $i\in I_n$ – пространственная форма, метрические характеристики и параметры размещения объектов T_0, T_i, $i\in I_n$, соответственно.

Используя аппарат ω-функций, математическую модель поставленной задачи можно представить как

$$\min_{Z\in D\subset E^{2n}}\theta(Z)=\min_{Z\in D\subset E^{2n}}\sum_{i\neq j=1}^{n}\omega_{ij}(Z_i,Z_j). \quad (15)$$

Таким образом, необходимо минимизировать суммарную площадь взаимного перекрытия покрывающих объектов T_i, $i\in I_n$ на области D, описываемой структурой (11).

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с. 2. ДБН В.2.5–13–98 Пожарная автоматика зданий и сооружений / Госстрой Украины. К.: 1999. С. 19–20, 71–72. 3. *Стоян Ю.Г.* Об одном обобщении функции плотного размещения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 8. С. 70–74. 4. *Магас С.Л.* Определение и свойства структур линейных неравенств // Автоматизация и проектирование в машиностроении. 1983. Вып.3. С. 5–11.

Поступила в редколлегию 28.12.2000

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Антошкин Алексей Анатольевич, адъюнкт кафедры пожарной автоматики и связи Академии пожарной безопасности Украины. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Чернышевского, 94, тел. (0572) 40-20-35.

Комяк Валентина Михайловна, д-р техн. наук, профессор кафедры фундаментальных дисциплин Академии пожарной безопасности Украины. Адрес: Украина, 61023, Харьков, ул. Чернышевского, 94, тел. (0572) 40-20-77.

Романова Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Пожарского, 2/10, тел. (0572) 95 95 36.

Шеховцов Сергей Борисович, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Университета внутренних дел. Адрес: Украина, 61180, Харьков, пр. 50–летия СССР, 27, тел. (0572) 50 30 67.