Розділ 2 Вступ до математичного аналізу

2.1. Послідовності.

2.1.1. Основні означення.

Означення.Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу 1, 2, 3, …, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задано *послідовність*.

Послідовність можна розглядати як *функцію*, областю визначення якої є множина натуральних чисел.

Приклад:

$$\begin{array}{cccccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} & = N; \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{1, & 8, & 27, & 64, & 125, & \ldots, & n^3, & \ldots\}. & \end{array}$$

Послідовність визначається *формулою*, тобто законом, згідно з яким установлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність із загальним членом a_n позначається $\{a_n\}$, або просто a_n.

У прикладі: $a_n = n^3$.

Інший спосіб визначення послідовності полягає в застосуванні *рекурсії*: n-й член послідовності визначається за допомогою заданих k $(k \le n)$ попередніх членів послідовності.

Приклад: Рекурсія $a_n = a_{n-1} + 3,\ a_1 = 0$ визначає послідовність 0, 3, 6, 9, ….

Приклад: Рекурсія $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$ визначає послідовність 1,2,5,27, 734, ….

Приклади послідовностей.

1) $a_n = \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots;$ 2) $a_n = n!, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots;$

3) $a_n = (-1)\frac{n}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots;$4) $a_n = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots.$

2.1.2. Обмежені та монотонні послідовності.

Означення. Послідовність $\{a_n\}$ називається *обмеженою*, коли існує таке додатне число M, що нерівність

$$|a_n| \le M$$

виконується для всіх n.

Означення. Послідовність $\{a_n\}$ називається *монотонно зростаючою*(*спадною*), якщо

$$a_{n+1} \ge a_n \quad (a_{n+1} \le a_n)$$

для всіх n.

Визначити, які з наведених далі послідовностей обмежені, а які монотонні.

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$, 3) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$,

2) $a_n = n!$, 4) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

За означенням відповідно обмеженої і монотонної послідовності маємо:

1) $|a_n| = \left|\dfrac{1}{n}\right| \le 1$ — обмежена послідовність;

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$ монотонна спадна послідовність;

2) $a_n = n!$ – необмежена послідовність;

3) $|a_n| = \left|\dfrac{1}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{2}$ – обмежена послідовність;

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^2}$$ – монотонно спадна послідовність;

4) $|a_n| = \left|\dfrac{n}{n+1}\right| = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$ – послідовність обмежена;

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} > \frac{n}{n+1} = a_n,$$ оскільки

$(n+1)^2 > (n+2)n \Rightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ – послідовність монотонно зростаюча.

Означення. Послідовність x_n називається *обмеженою зверху*, якщо існує число m, таке що при всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ виконується нерівність $x_n \le m$.

Означення. Послідовність x_n називається *обмеженою знизу*, якщо існує число m, таке що при всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ виконується нерівність $x_n \ge m$.

Означення. Послідовність x_n, не обмежена зверху або знизу, називається *необмеженою*.

Послідовність $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, для якої

$$x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = \frac{2}{3},\ \ x_3 = \frac{3}{4},\ \ldots$$

обмежена зверху та знизу: $0 < x_n < 1$.

Послідовність $x_n = -n$, тобто

$$x_1 = -1,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = -3,\ \ldots$$

обмежена зверху, але не обмежена знизу.

Означення. Множина довільних точок X на числовій осі називається *обмеженою зверху*, якщо існує число m, таке що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \le m$. Число m називається *верхньою межею множини*.

Означення. Множина довільних точок X на числовій осі називається *обмеженою знизу*, якщо існує число m, таке що для всіх, $x \in X$ виконується нерівність $x \geq m$. Число m називається *нижньою межею множини*.

Множина, для якої існують верхня та нижня межі, називається *обмеженою*.

Найменша серед верхніх меж називається *супремумом* і позначається $\sup\{x\}$. Найбільша серед нижніх меж називається *інфімумом* і позначається $\inf\{x\}$.

Означення. *Точною верхньою межею* множини X називається значення $M = \sup\{x\}$, таке що:

1) для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $x \leq M$;
2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $x \in X$, таке що

$$x > M - \varepsilon.$$

Аналогічно означується точна нижня межа множини *X*.

Теорема. У будь-якої обмеженої множини існують точні верхня та нижня межі.

2.1.3. Збіжні та розбіжні послідовності.

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{a_n\}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ для всіх } n > N(\varepsilon).$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Графічна ілюстрація

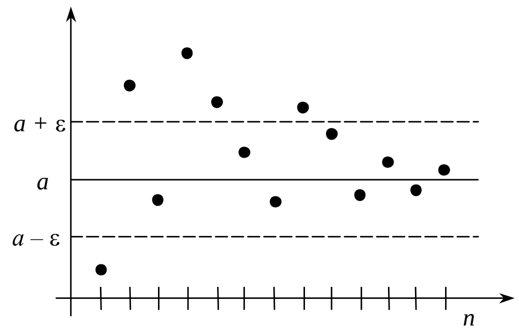


Рис. 2.1.

Означення. Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, а яка не має границі називається *розбіжною*.

Послідовність $a_n = \dfrac{1}{n}$ – збіжна, оскільки існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (за означенням $\left|\dfrac{1}{n-0}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ для будь-якого $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$).

Зауваження. Послідовність, границя якої дорівнює 0, називається *нульовою послідовністю*.

Послідовність $a_n = (-1)^{n+1}$ розбіжна, оскільки не має границі. Вона почергово набуває значення + 1 і –1.

2.1.4. Властивості збіжних послідовностей.

Теорема 1.Границя сталої дорівнює цій сталій:

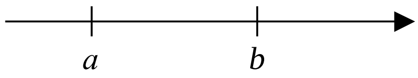
$$\lim_{n\to\infty} c = c, \quad c = \text{const} .$$

Доведення. Справді, $a_n = a$ для всіх n, тому

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon . \ ♦$$

Теорема 2.Якщо послідовність x_n має границю, то ця границя єдина.

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причому $a \neq b$.



Для визначеності візьмемо, що $b > a$ і $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то знайдеться число N, таке що при $n > N_1$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2.1}$$

А оскільки водночас $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то знайдеться число N_2, таке що при $n > N_2$

$$|x_n - b| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Візьмемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ одночасно виконуються обидві нерівності (2.1), (2.2).

Оцінімо

$$b - a = |b - a| = |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon = b - a ,$$

тобто $b - a < b - a$.

Це неправильна (хибна) нерівність. Дістали суперечність, яка й доводить теорему. ♦

Теорема 3.Послідовність x_n, яка має границю, є обмеженою.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, наприклад ε=1. Тоді знайдеться число N, таке що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n - a| < \varepsilon = 1$. Звідси випливає:

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a| .$$

Позначимо

$$M = \max\{\, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, 1 + |a| \,\} .$$

Тоді для всіх n

$$|x_n| \leq M ,$$

тобто послідовність x_n обмежена. ♦

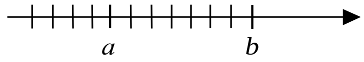
Теорема 4. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a < b$. Тоді знайдеться число *N*, таке що при будь-якому $n > N$ справджуватиметься нерівність

$$x_n < b.$$

Доведення. Візьмемо довільне значення ε, наприклад $\varepsilon = b - a$. Тоді знайдеться число *N*, таке що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$. Тоді $x_n - a < b - a$ або $x_n < b$.♦

Теорема 5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо послідовність x_nпри всіх n задовольняє нерівність $x_n \le b$, то $a \le b$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто $a > b$.

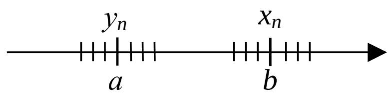


Тоді згідно з теоремою 4 можна стверджувати, що починаючи з деякого номера n виконуватиметься нерівність

$$x_n > b.$$

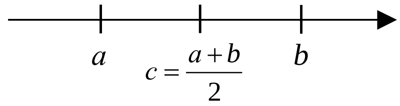
А це суперечить умові теореми. Отже, припущення неправильне. ♦

Теорема 6. Якщо $x_n \ge y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \ge b$.



Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $a < b$. Тоді згідно з теоремами 4 і 5, починаючи з деякого номера виконуватимуться нерівності

$$x_n < c = \frac{a+b}{2},\quad y_n > c = \frac{a+b}{2}.$$



Тоді $x_n < y_n$, що суперечить умові. Отже, припущення неправильне. ♦

Означення. Перехід від нерівності $x_n \ge y_n$ до нерівності $a \ge b$ називається *граничним переходом у нерівності*.

Теорема 7 (про «охоплену» послідовність або теорема про двох міліціонерів). Нехай виконується нерівність $x_n \le u_n \le y_n$. Якщо послідовності x_n і y_n збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то послідовність u_n також буде збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться число *N*, таке що при $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Аналогічно, знайдеться число N_2, таке що при $n > N_2$ виконується нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$. Візьмемо $N_2 = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються одночасно обидві нерівності

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon; \qquad \text{або} \qquad \underline{a-\varepsilon < x_n} < a+\varepsilon;$$
$$-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon; \qquad \qquad a-\varepsilon < \underline{y_n < a+\varepsilon}.$$

Розглянувши підкреслені нерівності, запишемо:

$$a-\varepsilon < x_n \le u_n \le y_n < a+\varepsilon .$$

Остаточно дістанемо $a-\varepsilon < u_n < a+\varepsilon$, або $|u_n - a| < \varepsilon$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти N, таке що при $n > N$ виконується нерівність $|u_n - a| < \varepsilon$, що означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. ♦

[illegible]: Розглянемо послідовність $u_n = \frac{1}{n}\sin n$.

При всіх n виконується нерівність $-\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sin n \le \frac{1}{n}$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n = 0$.•

Теорема 8 (Больцано-Вейєрштрасса). Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.

Доведення. Розглянемо множину значень послідовності $\{x_n\}$. Ця множина обмежена, тому вона має точну верхню і нижню межі. Для визначеності вважатимемо, що послідовність x_n монотонно зростає.

Позначимо $M = \sup\{x_n\}$ і доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. При всіх n за умовою теореми виконується нерівність $x_n \le M$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням точної верхньої межі можна знайти значення x_N, таке що $x_N > M - \varepsilon$. Оскільки послідовність монотонно зростає, то при $n > N$ маємо $x_N \ge x_N > M - \varepsilon$.

Із нерівностей $M - \varepsilon < x_n \le M$ випливає: $M - \varepsilon < x_n \le M + \varepsilon$ і $|x_n - M| < \varepsilon$.

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. ♦

2.1.5. Число *e*.

Розглянемо послідовність чисел $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Обчислимо кілька перших значень членів послідовності:

$$x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2;$$

$$x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25;$$

$$x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2,37...;$$

... ...

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ ....$$

Доведемо, що послідовність x_n монотонно зростає. За формулою бінома Ньютона маємо:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)...1}{1\cdot 2...n}\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+ \tag{2.3}$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Замінимо в цьому розкладі n на $n+1$. Тоді число доданків збільшиться на одиницю. Далі маємо:

$$n<n+1\Rightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\Rightarrow-\frac{1}{n}<-\frac{1}{n+1}\Rightarrow 1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}.$$

Кожний вираз, що містить n, зростає, тобто $x_{n+1}>x_n$.

Доведемо обмеженість послідовності x_n.

У формулі (3) значення кожного виразу в дужках менше від одиниці. Отже,

$$x_n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!}\ldots\le$$
$$\le 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометрична прогресія зі знаменником } q=\frac{1}{2}}+\ldots=2+1=3.$$

За формулою суми геометричної прогресії маємо:

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Звідси

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

За теоремою Больцано-Вейєрштрасса послідовність x_n має границю.

Означення. Границя послідовності $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ називається *числом* ***e***.

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Число e – *Неперове число*.

2.1.6. Наближене обчислення числа *e*.

У виразі (2.3), спрямувавши n до нескінченності, дістанемо:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

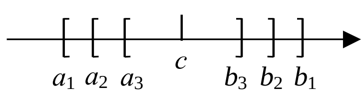
Обчислимо значення e з точністю до 5 знаків після коми:

$$2 = 2,00000$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} = 0,50000$$
$$+$$
$$\frac{1}{3!} = 0,166667$$
$$+$$
$$\frac{1}{4!} = 0,04166$$
$$+$$
$$\frac{1}{5!} = 0,00833$$
$$+$$
$$\frac{1}{6!} = 0,00139$$
$$+$$
$$+$$
$$\frac{1}{7!} = 0,00019$$
$$+$$
$$\frac{1}{8!} = 0,00002$$
$$\overline{\quad 2,71826 \quad}$$

$$e \approx 2,71828.$$

2.1.7. Лема про вкладені відрізки.

Розглянемо послідовність відрізків $[a_n,\ b_n]$, таких що кожний з наступних лежить у попередньому: $a_{n+1} \ge a_n$, $b_{n+1} \le b_n$ (рис.). Послідовність таких відрізків називається *послідовністю вкладених відрізків*.



Лема. Для послідовності вкладених відрізків [a_n, b_n] за умови $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ існує єдина точка c, яка належить усім відрізкам, і при цьому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$

Доведення. Розглянемо послідовність значень a_n. Вона монотонно зростає і обмежена зверху. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, причому завжди виконується умова $a_n \le c$. Припущення, що $\lim b_n = c_1 \ne c$ приведе до суперечності. Справді, якщо $c_1 < c$, то починаючи з деякого номера $b_n < a_n$. Це суперечить тому, що a_n– лівий кінець відрізка, b_n– правий.

За припущення $c_1 > c$ виконується нерівність $b_n \ge c_1 > c \ge a_n$.

Додаючи нерівності $b_n \ge c_1$ і $c \ge a_n$, дістаємо:

$$b_n + c \ge c_1 + a_n$$

або

$$b_n - a_n \ge c_1 - c > 0\,.$$

Це суперечить умові $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Припущення неправильне. Отже, $c_1 = c$. Водночас доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ і $a_n \le c \le b_n$. Точка c належить всім відрізкам, причому вона єдина.♦

2.1.8. Частинні послідовності.

Розглянемо послідовність x_n і вилучимо з неї деякі члени. Члени, що залишилися, занумеруємо наново $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$. Нова послідовність називається *частинною послідовністю*, або *підпослідовністю.*

Розглянемо послідовність $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$.

У цій послідовності можна розглянути частинні послідовності:

$$1, 1, 1, 1, ...;$$

$$-1, -1, -1, -1, -1, ...$$

Теорема 9. Якщо послідовність x_n має границю, то будь-яка частинна послідовність має цю саму границю.

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і число N, таке що для $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon\,.$$

Візьмемо частинну послідовність $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$, коли $n_k \ge k$. При $n > N$ виконується нерівність

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon\,.♦$$

Теорема 10 (принцип вибору Больцано-Вейєрштрасса). З будь-якої обмеженої послідовності можна вибрати збіжну частинну послідовність.

Доведення. Нехай усі члени послідовності містяться на відрізку [x, b]. Поділимо відрізок пополам. В одну його половину (або й в обидві) обов'язково потрапляє нескінченне число членів послідовності. Ту половину відрізка, яка містить нескінченне число членів послідовності, позначимо [a_1, b_1]. Візьмемо в ній точку x_{n_1}. Відрізок [a_1, b_1] поділимо пополам і одну з половин, яка містить нескінченне число членів послідовності, позначимо [a_2, b_2].

Виберемо в ній точку x_{n_2}, причому $n_2 > n_1$. Далі поділимо відрізок [a_2, b_2] пополам і позначимо половину, що містить нескінченне число членів послідовності, через [a_3, b_3] та виберемо тут точку x_{n_3} ($n_3 > n_2$) і т. д. Дістанемо послідовність вкладених відрізків. Довжина n відрізків [a_n, b_n] дорівнює $\frac{b-a}{2^n}$. Вона прямує до нуля при $n \to \infty$. За лемою про вкладені відрізки існує єдина точка c, така що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ при $a_n \le c \le b_n$. Для всіх n виконується нерівність $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. За теоремою 7 про «охоплену» послідовність маємо

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = c. \ \blacklozenge$$

Означення. Точна верхня межа границь усіх можливих частинних послідовностей з повної послідовності x_n називається *верхньою межею послідовності* і позначається

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

Точна нижня межа границь зазначених частинних послідовностей називається *нижньою межею послідовності* і позначається

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

У будь-якої послідовності існують верхня та нижня межі.

Якщо послідовність не обмежена зверху, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty .$$

Якщо послідовність не обмежена знизу, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty .$$

Зауважимо, що необмежена послідовність не може мати границі.

Розглянемо послідовність $x_n = (-1)^n$, тобто $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ \ldots$, і визначимо для неї верхню та нижню межі:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Розглянемо послідовність $x_n = (-1)^n n$. Для неї можна знайти верхню та нижню межі:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty.$$

2.1.9. Принцип збіжності Больцано-Коші.

Теорема 11. Для того щоб послідовність x_n мала границю, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого ε>0 знайшовся номер N, такий що при n>N, m>N виконується нерівність

$$\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon .$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай послідовність x_n прямує до границі a. За заданим ε>0 знайдеться номер N, такий що при n>N буде виконано нерівність $\left|x_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Коли $n > N$, $m > N$, дістанемо

$$\left|x_n - x_m\right| = \left|(x_n - a) - (x_m - a)\right| \le \left|x_n - a\right| + \left|x_m - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

або

$$\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon .$$

Достатність. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Знайдемо номер N, такий що при n>N, m>N виконується нерівність

$$\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon .$$

Послідовність x_n обмежена. Тому існує частинна послідовність x_{nm}, яка має границю a. Перейшовши в нерівності $\left|x_{n_k} - x_m\right| < \varepsilon$ до границі при $k \to \infty$, дістанемо $\left|a - x_m\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_m = a$. ♦

2.1.10. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.

Означення. Послідовність x_n називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Послідовність x_n називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема 11. Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай x_n, y_n – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що їх сума z_n=x_n+y_n є нескінченно мала послідовність. Візьмемо довільне ε>0. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, знайдеться число N, таке що при $n > N$ виконуватиметься нерівність $\left|x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно, знайдеться число N_2, таке що при $n > N_2$ виконуватиметься $\left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо число $N = \max\left\{N_1,\ N_2\right\}$. При $n > N$ справджуються обидві нерівності $\left|x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому

$$\left|z_n\right| = \left|x_n + y_n\right| \le \left|x_n\right| + \left|y_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

тобто

$$\left|z_n\right| < \varepsilon .$$

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. ♦

Зауваження. Сума нескінченно великого числа нескінченно малих послідовностей може і не бути нескінченно малою.

Послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ – нескінченно мала, але нескінченна сума цих послідовностей не є нескінченно малою.

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n}=1.$$

Теорема 12. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай послідовність x_n – нескінченно мала, а послідовність y_n – обмежена, тобто при всіх n виконується нерівність $|y_n| \le M$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться номер N, такий що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Далі маємо:

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon;$$

$$|x_n y_n| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. ♦

Послідовність $x_n = \dfrac{1}{n^3}$ – нескінченно мала, а послідовність $y_n = \cos n$ – обмежена, тому послідовність $\dfrac{\cos n}{n^3}$ є нескінченно малою.

Теорема 13. Якщо x_n — нескінченно велика послідовність, то $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ – нескінченно мала послідовність.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться число N таке, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Оцінимо величину y_n:

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Отже, $|y_n| < \varepsilon$, що означає

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0. ♦$$

Теорема 14. Якщо x_n — нескінченно мала послідовність і $x_n \ne 0$, то послідовність $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ є нескінченно великою.

Доведення аналогічне попередньому.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = \infty$.

Зауваження. Нескінченно велику (малу) послідовність називають також *нескінченно великою (малою) величиною*.

2.1.11. Теореми про границі.

Теорема 15. Для того щоб послідовність x_n мала границю a, необхідно і достатньо, щоб $x_n=a+y_n$, де y_n — нескінченно мала послідовність.

Доведення. *<u>Необхідність.</u>* Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Завжди знайдеться число N таке, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Позначимо $x_n - a = y_n$. Для послідовності y_n виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

<u>Достатність.</u> Нехай y_n– нескінченно мала послідовність. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Для нього знайдеться число N, таке що при $n > N$ виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$. Звідси випливає $|x_n - a| < \varepsilon$. Це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ♦

Теорема 16. Якщо послідовності x_n і y_n збігаються, а також

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

то послідовності x_n+y_n, x_ny_n, const x_n, $\dfrac{x_n}{y_n}$ $(b \neq 0)$ також збігаються і виконуються наведені далі рівності.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$ – *границя суми послідовностей дорівнює сумі їх границь, якщо вони існують.*
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$ – *границя добутку послідовностей дорівнює добутку їх границь, якщо вони існують.*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{const}\, x_n = \mathrm{const} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{const}\, a$ – *сталий множник можна винести за знак границі.*
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ – *границя відношення двох послідовностей дорівнює відношенню границь послідовностей, якщо вони існують і* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{3n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{n}}{\frac{3n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

2.1.12. Границя відношення двох многочленів.

Правило:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1}+\ldots+a_n}{b_q n^q + b_{q-1}n^{й-1}+\ldots+b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q}, \text{ якщо } p=q \\ \infty, \text{ якщо } p>q \\ 0, \text{ якщо } p<q \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{3n^2-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{1+\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

2.2. Границя функції.

2.2.1. Поняття границі функції.

Означення. Нехай $x_0 \in (a, b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) за винятком, можливо, точки x_0. Якщо для будь-якої збіжної послідовності x_n ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_0 \neq x_n$) існує $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то говорять, що функція $f(x)$ має границю A при $x \to x_0$.

Позначення:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Інше означення границі функції дав Коші:

***Означення*. (Коші)** *Границею функції* $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається число A, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x-a| < \delta,$ випливає $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

Графічна ілюстрація:

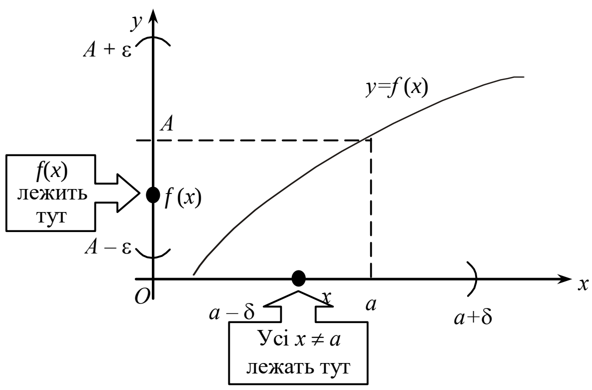


Рис. 2.2.

Пояснення. Для всіх x, що містяться поруч із точкою $x=a$, значення функції $f(x)$ лежать біля A.

Довести за означенням границі функції, що $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2$.

Застосовуємо означення границі, коли $f(x)=5x–3$, $a=1$, $A=2$.

Згідно з означенням потрібно показати, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке що для всіх x

$$0<|x-1|<8\Rightarrow|(5x-3)-2|<\varepsilon .$$

Маємо:

$$|5x-5|<\varepsilon;$$

$$5|x-1|<\varepsilon;$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Отже, можна взяти $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ (рис.4.3).

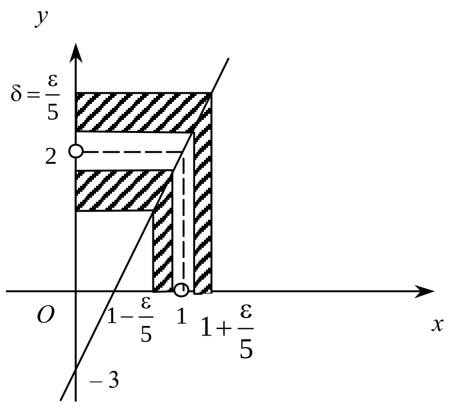


Рис. 2.3.

Для функції $y=5x-3$ нерівність $|f(x)-2|<\varepsilon$ виконується, як тільки $0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

2.2.2. Ліва та права границі функції.

Означення. *Правою границею функції* $y=f(x)$, коли x прямує до a справа, називається число l, таке що $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, при якому для всіх x, що задовольняють нерівність

$$a<x<a+\delta ,$$

маємо

$$|f(x)-A_+|<\varepsilon .$$

Позначення:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A_+ .$$

Графічна ілюстрація

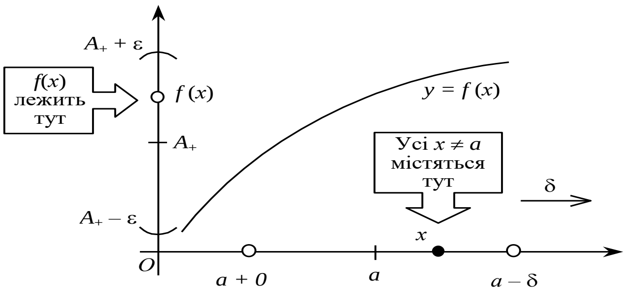


Рис. 2.4.

Означення. *Лівою границею функції* $y = f(x)$, коли x прямує до a зліва, називається число A_{-}, таке що при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує δ>0 таке, що для всіх x,які задовольняють нерівність

$$a - \delta < x < a,$$

маємо

$$\left| f(x) - A_{-} \right| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_{-}$.

Інколи границю $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ називають *двосторонньою границею*, а границі зліва та справа –*односторонніми границями*.

Зв'язок між односторонніми та двосторонніми границями. Функція $y = f(x)$ має границю в точці x=a тоді і тільки тоді, коли існують границі зліва та справа в точці x=a і дорівнюють одна одній. Символічно:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = A \text{ і } \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

2.2.3. Теореми про границі функції.

Теорема 17. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то функція $f(x)$ обмежена при $x \to a$.

Теорема 18. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,\ A \neq 0$, то знайдеться такий δ-окіл точки a, де ця функція набуває значень, які мають той самий знак, що й A.

Теорема 19. Якщо $f(x) = c,$ то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Теорема 20. Якщо $\phi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то існує границя $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теорема 21. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = B,$ то виконуються такі співвідношення:

1) $\lim\limits_{x \to a} (\phi(x) + \psi(x)) = \lim\limits_{x \to a} \phi(x) + \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A + B$;

2) $\lim\limits_{x \to a} (\phi(x)\psi(x)) = \lim\limits_{x \to a} \phi(x) \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = AB$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\phi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} \phi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \dfrac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$.

2.2.4. Перша визначна границя.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Доведення. З рис. 2.5 дістаємо:

$$S_{\Delta OAC}\le S_{\triangleleft OBC}\le S_{\Delta OBD}\Rightarrow\frac{\sin x\cos x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\mathrm{tg}x}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos x\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\frac{1}{\cos x}\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x.$$

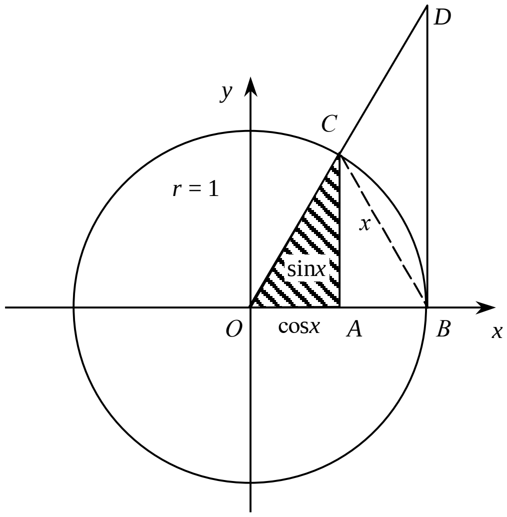


Рис. 2.5.

Доведемо, що коли $x\to 0$, то $\cos x\to 1$, причому з рисунка бачимо: $0<\sin x<x$.
За теоремою 7 про «охоплену» послідовність (п. 4.1.4):

$$\lim_{x\to+0}\sin x=0,\quad \lim_{x\to-0}\sin x=\lim_{\substack{y\to+0\\ -x=y}}\sin(-y)=-\lim_{y\to+0}\sin y=0,$$

тобто

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}=1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Графічна ілюстрація $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

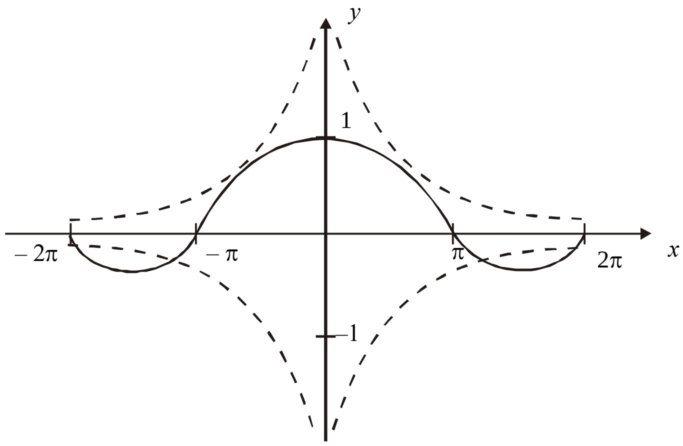


Рис. 2.6.

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

$$♦\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\,\frac{ax}{\dfrac{\sin bx}{bx}bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}\ ♦$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{bx}=\dfrac{a}{b}$.

$$♦\ \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin ax}{\cos ax}}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\cos ax\cdot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax\cdot ax}{\cos ax\cdot bx\cdot ax}=\frac{a}{b}\ ♦$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$.

$$♦\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}ax}{bx}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{arctg}ax=t\Rightarrow t\to 0\\ ax=\mathrm{tg}t\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}\cdot\mathrm{tg}t\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{b}{a}\mathrm{tg}t}=\frac{a}{b}\,.♦$$

2.2.5. Друга визначна границя.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Доведення. 1. Припустимо, що $x>0,\ x\to+\infty$. Для будь-якого x знайдеться натуральне число *n*, таке що $n\le x<n+1$. Тоді

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1},$$

або

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}.$$

Якщо велике число піднесемо до великого степеня, нерівність лише підсилиться. Дістаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Обчислимо границі:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

За теоремою 7 про «охоплену» послідовність маємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2. Нехай $x<0,\ x\to-\infty$. Знайдемо

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \begin{vmatrix} x=-1-y \\ y=-x-1 \\ y\to+\infty \end{vmatrix} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-1-y}\right)^{-1-y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1+y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

$$\blacklozenge \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \begin{vmatrix} \text{Користуємося} \\ \text{неперервністю} \\ \text{функції } y=\ln x \end{vmatrix} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1. \blacklozenge$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$

$$\blacklozenge \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\log_a x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e.\ \blacklozenge$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

$$\blacklozenge \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{vmatrix} y=e^x-1 \\ 1+y=e^x \\ x=\ln(1+y) \end{vmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1.\ \blacklozenge$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

$$\blacklozenge\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\ln a\ .\ \blacklozenge$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

$$\blacklozenge\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu+1}{x}=\left|\begin{array}{c}(1+x)^\mu-1=y\\ (1+x)^\mu=1+y\\ \mu\ln(1+x)=\ln(1+y)\\ \dfrac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=1\end{array}\right|=\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\frac{y}{x}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=$$

$$=\mu\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}=\mu.\ \blacklozenge$$

У частинному випадку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

2.2.6. Формула Ейлера.

Л. Ейлер дав означення показникової функції за формулою:

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,\ z\in C.$$

Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{iy}{n}\right)^n$, $y\in R$.

Розв'язування. Позначимо $z_n=1+\dfrac{iy}{n}$, $\quad |z_n|=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{n}\right)^2}$.

Скориставшись формулою Муавра, дістанемо:

$$\mathrm{tg}\phi_n=\frac{y}{n},\ \phi_n=\arg z_n\,;$$

$$1+\frac{yi}{n}=\sqrt{1+\frac{y^2}{n^2}}(\cos\phi_n+i\sin\phi_n)\,;$$

$$\left(1+\frac{yi}{n}\right)^n=\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}(\cos n\phi_n+i\sin n\phi_n)\,.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{y^2}{n^2}}=e^0=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}n\phi_n=\lim_{n\to\infty}n\,\mathrm{arctg}\frac{y}{n}=\lim_{n\to\infty}n\frac{y}{n}=y.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n = \cos y + i\sin y\,.$$

Звідси випливає формула Ейлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y\,.$$

Для показникової функції маємо

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,.$$

Тоді можна також знайти вирази для тригонометричних функцій sin *x* і cos *x*

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Обчислити $e^{i\pi}$.

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1.$

2.3. Неперервність функції.

2.3.1. Основні поняття.

Означення (Коші). Функція *y* = *f*(*x*) називається *неперервною в точці* x_0 функцією, якщо ця функція *f* визначена в точці x_0 і для кожного (достатньо малого) числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - x_0| < \delta$ виконується $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

або *f*(*x*) – *неперервна в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Відношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ можна переписати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

Графічна ілюстрація

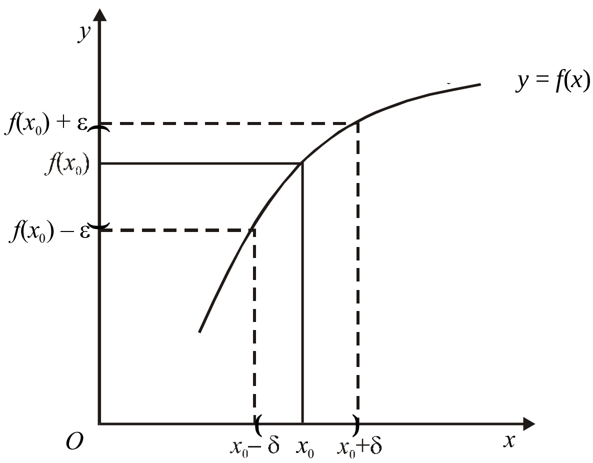


Рис. 2.7.

Пояснення. Функція *y* = *f*(*x*) – неперервна в точці x_0, якщо при будь-якому *x* з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ значення *f*(*x*) лежать у смузі $f(x_0) - \varepsilon < y < f(x_0) + \varepsilon$.

Дамо означення неперервності функції, еквівалентні означенню Коші.

Означення. Функція *y* = *f*(*x*) називається *неперервною в точці* x_0, якщо

1) $f(x)$ визначена в точці x_0;

2) границя зліва в точці x_0 дорівнює границі справа в цій точці і дорівнює значенню в ній функції (рис. 3.8):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

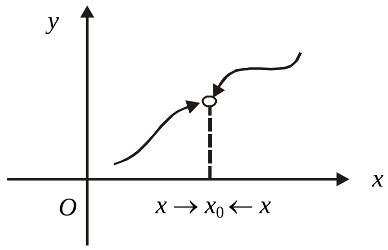


Рис. 2.8.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$.

Довести за означенням, що функції $y = x^2$ і $y = \sin x$ неперервні в будь-якій точці $x_0 \in R$.

Розв'язування. 1. Надамо аргументу $x_0 \in R$ приросту Δx, тоді $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$.

Якщо Δx– нескінченно мала величина, то Δy– також нескінченно мала величина, оскільки коли $\Delta x \to 0$, то і $\Delta y \to 0$. Отже, $y = x^2$– неперервна функція при будь-якому $x_0 \in R$.

2. Надамо аргументу $x_0 \in R$ приросту Δx:

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна функція при будь-якому $x_0 \in R$.

Означення. Функція $y = f(x)$ *неперервна на проміжку* (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Означення. Функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$, якщо вона неперервна на проміжку (a, b) і неперервна в точці $x = a$ справа і в точці $x = b$ зліва.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *справа* (*зліва*), якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \ \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right).$$

Функція $y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$

неперервна в точці x_0 зліва (рис. 2.9).

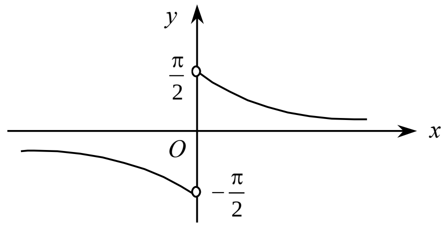


Рис. 2.9.

2.3.2. Властивості неперервних функцій.

Теорема 1. Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

Теорема 2. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на інтервалі (a, b). Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні:

1) $f(x) \pm g(x)$; 3) const $g(x)$;

2) $f(x)\, g(x)$; 4) $f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $u = F(y)$ неперервна в точці $f(x_0)$, то їх композиція $f \circ F$ – складена функція і $u = F(f(x))$ – неперервна в точці x_0.

Доведення. За означенням

$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) \underset{\substack{\Downarrow \\ F\text{ – неперервна в т.} x_0}}{=} F\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \underset{\substack{\Downarrow \\ f\text{ – неперервна в т.} x_0}}{=} F(f(x_0)).$$

Довести, що функція

$$y = \left|\frac{x\sin x}{x^2+2}\right|$$

неперервна в будь-якій точці x.

Розв'язування. Функція y є композицією двох неперервних функцій

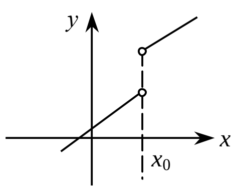
$$f(x) = \frac{x\sin x}{x^2+2} \text{ і } F(x) = |x|.$$

Функція $f(x)$ і $F(x)$ неперервна згідно з теоремою 1, а їх композиція $f \circ F$ неперервна за теоремою 3. •

2.3.3. Розриви функції.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0, називається *розривною* в цій точці.

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ



1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (рис. 2.10).

Рис. 2.10.

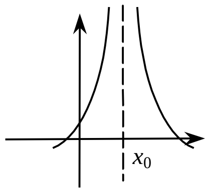


Рис. 2.11.

2. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$ (рис. 2.11).

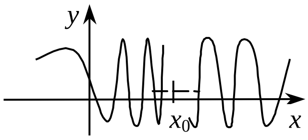


Рис. 2.12.

3. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\end{matrix}\right\}$ не існує (рис. 2.12).

Означення. Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $y = f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),\quad \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і при цьому:

$$\left.\begin{matrix}1.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0)\\ \textit{або}\\ 2.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq f(x_0)\\ \textit{або}\\ 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x_0)\end{matrix}\right\}\ -\ \textit{неусувний розрив } 1-\textit{го роду};$$

$$4.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x_0)\neq f(x_0)\ -\ \textit{усувний розрив } 1-\textit{го роду}.$$

Означення. Точка x_0 називається *точкою розриву 2-го роду*функції$y = f(x)$, якщо одна із границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або нескінченна

2.3.4. Методика дослідження функції *y* = *f*(*x*) на неперервність.

1. Знаходимо точку x_0– «підозрілу» на розрив. Це може бути точка, в якій функція невизначена або змінює закон визначеності.
2. Визначаємо інтервали неперервності функції.
3. Обчислюємо

$$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),\quad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x).$$

4. Робимо висновок згідно з теоремами (якщо такі границі існують), або використовуючи означення точок розриву.

Дослідити на неперервність функцію

$$y=\begin{cases} x,\ x\le 1;\\ x+1,\ x>1.\end{cases}$$

•

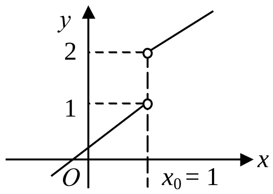


Рис. 2.13.

1. Точка x_0=1 є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку (– ∞; 1) маємо $y = x$, на проміжку (1, +∞) – іншу залежність: y=x+1).

2. Функція неперервна на проміжках (– ∞; 1) і (1; + ∞).

3. Знаходимо

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2.$$

4. $1\neq 2$, тому за означенням функція $y=\begin{cases} x, \ x\le 1; \\ x+1, \ x>1 \end{cases}$ має в точці x=1 неусувний розрив 1-го роду.

Дослідити на неперервність функцію

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \ x\neq 0; \\ 1 \quad\quad , \ x=0. \end{cases}$$

• 1. Точка x_0=0 є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності.

2. (– ∞; 0) ∪ (0; + ∞) – множина, де функція неперервна.

3. Знаходимо

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

1 = 1 =1 – функція неперервна в точці x_0 = 0 за означенням неперервної функції. Отже, інтервалом неперервності функції $y=f(x)\in(-\infty;\ \infty)$.

2.3.5. Наслідки з формул для визначних границь.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$

2.3.6. Порівняння нескінченно малих величин.

Розглянемо функції $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$, $y=\gamma(x)$ і припустимо, що

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)=\lim_{x\to a}\gamma(x)=0,$$

де a– скінчена точка або нескінченність, тобто $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ – нескінченно малі величини.

Означення. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *нескінченно малими величинами одного порядку мализни*, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,\quad A\neq\infty.$$

Означення. Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною вищого порядку мализни*,порівняно з $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

Означення. Якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *непорівнянними нескінченно малими величинами*.

Величина $\alpha(x)=\sin x^2$– нескінченно мала вищого порядку мализни порівняно з x, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\downarrow\atop 1}x=\lim_{x\to 0}1\cdot x=0.$$

Величини $x\sin\dfrac{1}{x}$ і x нескінченно малі при $x\to 0$ та непорівнянні, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{ – не існує.}$$

Означення. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to\alpha$ називаються *еквівалентними*, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Позначення. Еквівалентність нескінченно малих величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ позначається $\alpha\sim\beta$ і означає, що величина α «поводиться як» величина β.

Величини e^x-1 і x при $x\to 0$ еквівалентні, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Теорема 1. Для того щоб дві нескінченно малі величини були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їх різниця $\gamma=\alpha-\beta$ була нескінченно малою величиною вищого порядку мализни порівняно з α і β.

Доведення. Необхідність. Нехай α і β– еквівалентні нескінченно малі величини при $x\to a$. Знайдемо

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}:$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\lim_{x\to a}1-\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=0.$$

Аналогічно,

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}-1=0\,.$$

Отже, γ– нескінченно мала величина вищого порядку мализни порівняно з α і β.

Достатність. Нехай

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0 \text{ і } \lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=0\,. \text{ Тоді}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta+\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma+\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\gamma}{\beta}+1\right)=1$$

Отже, $\alpha\sim\beta$.

Теорема 2. Нескінченно малі величини, які входять до добутку та відношення, можна замінювати їм еквівалентними.

Доведення. Нехай $\alpha\sim\beta$. Шукаємо границю:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}.$$

$$1=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}.$$

Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ замінюється еквівалентною їй величиною $\gamma(x)$. При цьому значення границі не змінюється. ♦

Означення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини. У разі, коли

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha^k}=A,\ A\neq 0,\ A\neq\infty,$$

говорять, що *нескінченно мала величина* β *має порядок k відносно нескінченно малої величини* α *або скорочено*: β– *величина порядку k.* Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{A\alpha^k}=1.$$

Величина $A\alpha^k$ – називається *головною частиною нескінченно малої величини* β.

Порівняємо нескінченно малі величини $\beta(x)=1-\cos x$ і $\alpha(x)=x$ при $x\to 0$.

Розв'язування. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\approx 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Отже, величина $1-\cos x$ є нескінченно малою другого порядку мализни відносно x. Її головна частина дорівнює $\frac{1}{2}x^2$.

2.3.7. Шкала еквівалентних нескінченно малих величин.

1. $\sin x \sim x, \quad x \to 0.$

2. $\ln(1+x) \sim x, \quad \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x, \quad x \to 0.$

3. $e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \to 0.$

4. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, \quad x \to 0.$

5. $\arcsin x \sim x, \quad x \to 0.$

6. $\mathrm{tg}x \sim x, \quad x \to 0.$

7. $\mathrm{arctg}x \sim x, \quad x \to 0.$

Знайти границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+2x}+\sqrt[4]{1+3x}+\sqrt[5]{1-x}-4}{\arcsin 2x+\sin x-\mathrm{tg}x+\ln(1+3x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}-\frac{x}{5}}{2x+x-x+3x}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}}{2+3}=\frac{103}{300}.$$

Зауваження. У виразі, який містить суму та різницю, заміна нескінченно малих величин еквівалентними їм може іноді призвести до помилки.

Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}.$$

Розв'язування. Спосіб 1-й. Скориставшись формулою $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, запишемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+1-x+x^2}{x^2}=2\,.$$

Спосіб 2-й. У чисельнику застосуємо формулу $\ln a+\ln b=\ln ab$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1.$$

Висновок. Спосіб 1-й помилковий. Якщо в сумі або різниці при заміні нескінченно малих їм еквівалентними взаємно знищуються малі вищого порядку, то така заміна неприпустима. •

2.3.8. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема 1. (Больцано-Коші). Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків. Тоді на інтервалі (a; b) знайдеться точка c, в якій функція перетворюється на нуль.

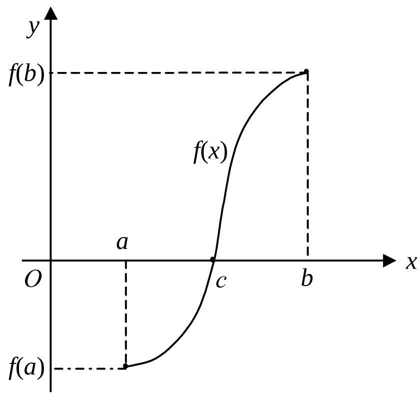


Рис. 2.14, *а*.

Доведення. Припустивши, для визначеності, що $f(a)<0,\ f(b)>0$ (рис. 2.14, *а*), розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ пополам. У точці $x=\dfrac{a+b}{2}$ значення функції $f(x)$ може дорівнювати нулю. У такому разі теорему доведено. Якщо ця функція не перетворюється на нуль у зазначеній точці, то позначимо $[a_1;\ b_1]$ ту з половин даного відрізка, де на кінцях функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Аналогічно відрізок $[a_1;\ b_1]$ також розіб'ємо пополам. Якщо в його середині функція перетворюється на нуль, то теорему доведено. Якщо в цій точці функція відмінна від нуля, то позначаємо $[a_2;\ b_2]$ ту з половин відрізка $[a_1;\ b_1]$, на кінцях якої набуває значень різних знаків. Міркуючи так, або дістанемо функцію, що стає нулем у середині одного з утворюваних відрізків, або утворимо нескінченну послідовність вкладених відрізків $[a;\ b]$, $[a_1;\ b_1]$, $[a_2;\ b_2]$, … .

Довжина цих відрізків прямує до нуля. Отже, існує точка c, така що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. За припущенням маємо $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0$, тобто $f(c)\le 0$ і $f(c)\ge 0$. Це означає, що $f(c)=0$. ♦

Зауваження. Точок, у яких функція перетворюється на нуль, може бути кілька (рис. 2.14, *б*).

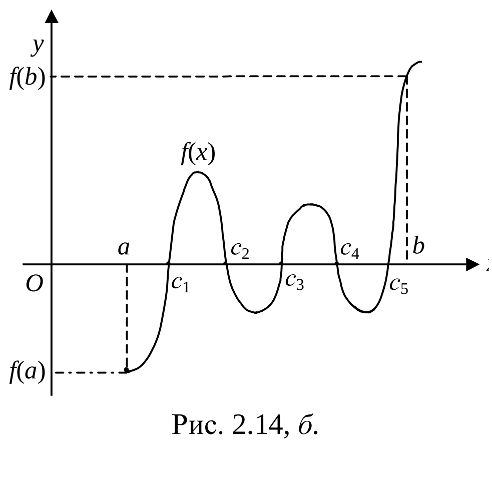


Рис. 2.14, *б*.

2. Алгоритм, запропонований Коші, придатний для чисельного відшукання коренів функції.

Теорема 2 (Коші).Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях набуває різних значень. Позначимо $f(a)=A$ і $f(b)=B$. Тоді при будь-якому C: $A<C<B$ знайдеться точка c із $[a,\ b]$, така що $f(c) = C$.

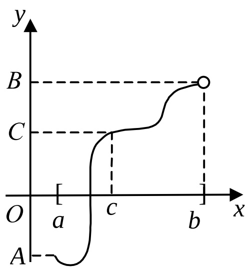


Рис. 2.15

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\psi(x) = f(x) - c$. Вона неперервна як різниця неперервних функцій. Маємо:

$$\psi(a) = f(a) - C = A - C < 0;$$

$$\psi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тоді за теоремою Больцано-Коші знайдеться значення c, для якого $\psi(c) = 0$ і $f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C$. ♦

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то в кожній точці x_0 цього відрізка при деякому заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де функція задовольняє нерівності

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon,$$

або

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

За теоремою Бореля із нескінченного покриття відрізка інтервалами завжди можна вибрати скінченне підпокриття, тобто існує скінченна множина точок x_k з інтервалів $\left(x_k - \delta_k;\ x_k + \delta_k\right)$, що покривають відрізок $[a; b]$, таких що на кожному інтервалі виконується нерівність

$$f\left(x_k\right) - \varepsilon < f\left(x\right) < f\left(x_k\right) + \varepsilon.$$

Позначимо

$$M = \max_k \left\{ f(x_k) + \varepsilon \right\},$$

$$m = \min_k \left\{ f(x_k) - \varepsilon \right\}.$$

За побудовою інтервалів виконується нерівність $m < f(x) < M$. Отже, функція обмежена. ♦

Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x}$. Вона неперервна на інтервалі (0; 1], але не обмежена (рис. 2.16).

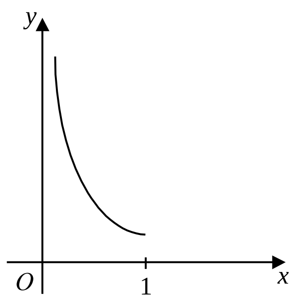


Рис. 2.16.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a,b]$, досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

Доведення. Міркуємо від противного. Нехай функція $y = f(x)$ має точну верхню межу $M = \sup\{ f(x)\},\ x \in [a;b]$, але не досягає її, тобто при всіх x виконується нерівність $M - f(x) > 0$.

Розглянемо функцію

$$\psi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Вона не перетворюється на нуль, тому вона неперервна і згідно з теоремою 3 обмежена. Існує число $\mu > 0$, таке що при всіх x, які належать відрізку $[a, b]$, маємо: $\frac{1}{M - f(x)} \le \mu \Rightarrow M - f(x) \ge \frac{1}{\mu}$ або $f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$.

Маємо суперечність. Адже M не є точною верхньою межею функції $f(x)$ при будь-якому x. Отже, припущення не правильне, тобто неперервна функція досягає своєї точної верхньої межі. Це означає, що існує точка $x_m \in [a, b]$, в якій $f(x_m) = M$. Розглянемо функцію $y=f(x)$. За доведеним вона досягає свого точного нижнього значення m при $m = \inf\{ f(x)\},\ x \in [a; b]$. ♦

Розглянемо функцію $y = x$ на інтервалі (0; 1). Ця функція обмежена. Її значення мають точну верхню та точну нижню межі. Побудуємо графік (рис. 4.17).

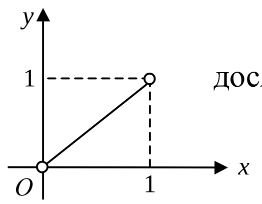


Рис. 2.17.

Можна знайти $\sup\{x\} = 1;\ \inf\{x\} = 0.$ Але точок, в яких функція досягає найбільшого та найменшого значень, немає.

2.3.9. Рівномірна неперервність.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається *рівномірно неперервною на деякому проміжку I*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке що для будь-яких $x_1, x_2 \in I$, які задовольняють умову $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Розглянемо неперервну функцію $y = \frac{1}{x}$ на проміжку (0; 1). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і спробуємо знайти $\delta > 0$, таке щоб за умови $|x_1 - x_2| < \delta$ виконувалась нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Дістанемо:

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon, \quad \text{або} \quad \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| < \varepsilon.$$

Вираз $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot x_1}\right|$ за умови $|x_1 - x_2| < \delta$ може бути як завгодно великим. Якщо значення $|x_1|$ і $|x_2|$ достатньо малі, то нерівність $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| < \varepsilon$ не може виконуватися при всіх $|x_1|$ і $|x_2|$ із (0, 1). Отже, ця функція не є рівномірно неперервною.

Зауваження. Поняття рівномірної неперервності пов'язане з проміжком, на якому розглядається функція («рівномірно» – це приблизно однаково).

Теорема 5 (Кантора). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона рівномірно неперервна на ньому.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Припустимо, що функція не є рівномірно неперервною, тобто при будь-якому $\delta > 0$ знайдуться значення x_1, $x_2 \in [a, b]$, такі що виконується нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Візьмемо послідовність значень $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \to 0$. При кожному значенні δ_n знаходимо значення аргументу x_n^1 і x_n^n, такі що для $|x_n^1 - x_n^n| < \delta_n$ маємо:

$$\left|f(x_n^1) - f(x_n^n)\right| \geq \varepsilon.$$

Послідовність значень x_n^1 – обмежена, тому знайдеться частинна послідовність $x_{n_k}^1$, що має границю c. Дістанемо:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^1 = c; \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^n = c;$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^n)\right] = f(c) - f(c) = 0.$$

Водночас має виконуватися нерівність $\left|f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^n)\right| \geq \varepsilon.$ Здобута суперечність означає, що припущення неправильне, а отже, функція $f(x)$ рівномірно неперервна. ♦

Вправи для самостійного розв'язування

1. Довести, що при $x \to 0$ нескінченно малі величини $2(\mathrm{tg}x - \sin x)$ і x^3 еквівалентні:

2. Показати, що при $x \to 0$ нескінченно малі величини $\sqrt[6]{x^3 + \sqrt{x^3}}$ і $\mathrm{tg}\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ еквівалентні.

3. Знайти границі наведених далі виразів при $x \to 0$:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x};\quad \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\mathrm{tg}2x};\quad \frac{\arcsin x}{\sin 4x};\quad \frac{\mathrm{arctg}3x}{\arcsin 2x}.$$

Відповідь. $\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{2}.$

4. Довести, що коли $\alpha \sim \alpha'$ і $\beta \sim \beta'$, то $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}\arcsin\dfrac{3}{x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{x}}}{\sin\dfrac{1}{x}\operatorname{tg}\dfrac{5}{x\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{x}}}$. *Відповідь.* 2.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2x-3x^2+4x^3\right)}{\ln\left(1-x+2x^2-7x^3\right)}$. *Відповідь.* –2.

7. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\sin\dfrac{x-7}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{14}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{7}{\pi}$.

8. Довести рівності.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\right)=2$; **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{3x^3}-\dfrac{81}{9-x}\right)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$, якщо x із наближенням до a зростає;

4) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, якщо x із наближенням до a спадає;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{2x}=\infty$; **6)** $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{4y^2+7y-1}{2y^2}=2$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2-7x-1}=\dfrac{2}{3}$; **8)** $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4-z}{8z+3}=-\dfrac{1}{8}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-2}{2x^4+5}=0$; **10)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-7}{x^2+2}=1$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+6x^2}{2x^4-15x^2}=-\dfrac{2}{5}$; **12)** $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t^3+3t^2}{t^2}=\infty$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x}{x}=\infty$; **14)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$; **16)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+b}\right)=\dfrac{a-c}{2}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a$; **18)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\left(1-\sin x\right)^2}}=\infty$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^2}{n^2}=1$; **20)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(n+1\right)}{\left(n+2\right)\left(n+3\right)}=1$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left(n+1\right)^2}{3^{n+1}n^2}=\dfrac{1}{3}$; **22)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^{n+1}\cdot n}{n^{n+1}\left(n+1\right)}=e$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$; **24)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}\right)=1$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\left(n+1\right)}{n^3}=\dfrac{1}{3}$; **26)** $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t=\dfrac{1}{e}$;

27) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^t=\dfrac{1}{e}$; **28)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+3}=e$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left\{\ln(n+1)-\ln n\right\}\right]=1$; **30)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{5\cos x}=e^5$.

9. Як зміняться корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, якщо коефіцієнти b і c лишатимуться сталими $(b\neq 0)$, а коефіцієнт a прямуватиме до нуля?

10. У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює x, а другий $2\sqrt{x}$. Знайти границю різниці між гіпотенузою і катетом x, а також границю відношення гіпотенузи до цього катета при $x\to\infty$.

Знайти границі функції (11–50).

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2+x}{(x-2)(x^3-x+1)}-\dfrac{2}{x-2}\right]$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2+1}-\dfrac{2x^2}{4x-1}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+n^2+1}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n-n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^2}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]^2$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m і n– цілі числа).

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x^{\frac{r}{s}}-1}$.

29. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$ (α і β– цілі додатні числа).

32.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$, $a>0$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $a>0$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{2n}}{1+a^{2n+1}}$, $a>0$.

33.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **2)** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; **5)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; **6)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

34. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.

35. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{2+x+x}$.

36. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

37. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.

38. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

39.1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; **2)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

40. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$.

41. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

42. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

43. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}\right]$.

44. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

45. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)}-x\right)$.

47. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{a+x}-\sqrt[k]{a-x}}{x}$.

48. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^m-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^m}{x}$.

49. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\,(a>b>0)$.

50. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax-x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\,(a>0)$.

51. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$.

52. Визначити λ і μ за умовою: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{a_ix+b_ix+c_i}-\lambda x-\mu\right)=0;\ a_i>0,\ i=1,2,...,k.$

53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{x}$.

54. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$.

55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\operatorname{tg}x}$.

56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m і n– цілі числа).

57. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$.

58. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m і n– цілі числа).

59. $\lim\limits_{n\to\infty}2n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

60. $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x$.

61. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

62. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos mn}{x^2}$.

63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos mn-\cos nx}{x^2}$.

64. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

65. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

66. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

68. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

70. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1}\right)$.

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}\,x}}{\sin x}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos 3x}}{x^2}$.

74. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}$.

78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x}$.

80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-x+1}\right)^{\frac{x^4+1}{x^2-1}}$.

81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{1-2x^4}{1+x^2}}$.

82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$.

83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgpx\right)^{ctgqx}$ $\left(p, q - \textit{цілі додатні числа}\right)$.

84. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tg^2x\right)^{ctg^2x}$.

85. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

86. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^{m}$.

87. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{m}}\right)^{m}$.

88. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}+\lambda\sin\dfrac{q}{m}\right)^{m}$.

89. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

90. $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\dfrac{\sin\left(a+\frac{b}{m}\right)}{\sin a}\right]$ $\left(a, b - \textit{цілі додатні числа}\right)$.

91. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sin x\right)^{tg2x}$.

92. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{ctgx}{ctga}\right)^{ctg^3(x-a)}$.

93. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}}}\left[tg\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{tg2x}$.

94. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)\pi\right]^{tg\frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{n}{2}}$ $\left(n - \textit{ціле додатне число}\right)$.

95. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[tg\left(\dfrac{3n+1}{8n+2}\pi\right)\right]^{tg\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}}$ $\left(n - \textit{ціле додатне число}\right)$.

96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$.

97. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\log x-1}{x-e}$.

98. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\log_{10}x-1}{x-10}$.

99. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log tgx-1}{\cos 2x}$.

100. $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\log(1+ax)\right]^{\frac{1}{x}}$ $\left(a - \textit{ціле додатне число}\right)$.

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\cos\alpha x}{\log\cos\beta x}$ $\left(\alpha, \beta - \textit{цілі додатні числа}\right)$.

102. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \log\cos\frac{\pi}{n}$. **103.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right)$. **104.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log tgx}{1-ctgx}$.

105. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+e^2\right)}{x}$. **106.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+e^{\alpha x}\right)}{\log\left(1+e^{\beta x}\right)}$; $\alpha>0, \beta>0.$

107. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$. **108.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$. **109.** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$.

110. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$. **111.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{3x}}{x}\left(a>0\right)$. **112.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$; $a>0, b>0$.

113. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}\left(\alpha, \beta - \textit{цілі додатні числа}\right)$.

114. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **115.** $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^{\sqrt{2}}-a^{\sqrt{2}}}{x-a}$. **116.** $\lim\limits_{x\to e} \frac{a^x-a^x}{x-c}$.

117. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+a^n\right)^{\frac{1}{n}}$, $a>0$. **118.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

119. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+...+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n$.

120. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log\left(1+x+x^2\right)+\log\left(1-x+x^2\right)}{x^2}$.

121. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\log 2+2\log\cos x}{\cos 2x}$.

122. $\lim\limits_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2a+x}{a+x}\right)\left(a>0\right)$.

123. Довести, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^k}$ при будь-якому додатному k.

Вказівка. Узяти $x=z^{\frac{2}{k}}$ і скористатися нерівністю $z=e^{\log z}>1+\left(e-1\right)\log z$.

124. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x^m\left(\log x\right)^n; m>0, n>0$.

Вказівка. Див. задачу 123.

125. Показати, що функцій $x^4-2x^3+x^2+6$ і $\frac{5x-2}{x^2+3}$ неперервні при всіх (дійсних) значеннях *x*.

126. Показати, що функція $\text{tg}\frac{1}{x}$ неперервна при $x>\frac{2}{\pi}$ і $x<-\frac{2}{\pi}$.

127. Співвідношенням $f\left(x\right)=\frac{x^2-25}{\left(x-5\right)\left(x^2+1\right)}$ функція *f* визначається для всіх (дійсних) значень *x*, крім *x* = 5 (у цьому разі знаменник перетворюється на нуль, і дріб втрачає зміст), а тому значення *f*(5) має бути задане додатково.

Чи буде функція неперервна в усіх точках, якщо: 1)$f(5) = 1$; 2) $f(5)=\frac{5}{13}$?

128. Побудувати графік функції, що визначається умовами $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2x}$ при $x\neq 0$ і $f(0)=1$. Дослідити функцію на неперервність.

129. Побудувати графік функції, що визначається співвідношенням $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ при $x\neq 0$.

1) Яким має бути значення $f(0)$, щоб функція f була скрізь неперервною?

2) Чи можна для функції, розглянутої в попередній задачі, знайти таке значення $f(0)$, щоб відновити її неперервність?

130. Функцію задано формулою $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+3\right)$ при $0\le x\le 1$.Дослідити її на неперервність і побудувати графік.

131. У теорії чисел розглядається функція $E(x)$, яка задає цілу частину числа x, точніше – найбільше ціле невід’ємне число, що не перевищує x. Наприклад: $E(2{,}5)=2$; $E(5{,}75)=5$; $E(4)=4$; $E\left(\sqrt{10}\right)=3$. Побудувати графік функції $E(x)$ і дослідити її на неперервність.

132. Чи буде функція $y=2x$ при $0\le x\le 1$ і $y=3-x$ при $1\le x\le 2$ неперервною на проміжку $0\le x\le 2$? Побудувати графік її.

133. При яких значеннях x $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ зазнає розриву?

134. При яких значеннях x зазнає розриву функція $y=\sqrt{x}-E\sqrt{x}\quad (x\ge 0)$.

135. При якому значенні a функція $y=x\log(x^2)\quad (x\neq 0)$, $y=a$, якщо $x=0$,неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$?

При яких значеннях x зазнають розрив у функції (136–141)?

136. $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x}{2\mathrm{tg}^2x+1}$.

137. $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$.

138. $y=\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}2x}$.

139. $y=\lg\lg x$.

140. $y=\dfrac{\mathrm{tg}4x}{\mathrm{tg}x}$.

141. $y=\dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{tg}^{2^{\frac{\pi x}{2}}}}{x^2-3x+2}$.