Розділ 3

Диференціальне числення функцій однієї змінної

3.1. Похідна. Її фізична (механічна) та геометрична інтерпретація.

I. Вважаючи, що $\Delta x \neq 0$, розглянемо в даній фіксованій точці x відношення приросту функції в цій точці до відповідного приросту аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.1)$$

(3.1) – це різницеве відношення (у даній точці x). Оскільки значення x ми вважаємо фіксованим, то (3.1) являє собою функцію аргумента Δx. Ця функція визначена для всіх значень аргумента Δx, що належить деякому досить малому околу точки $\Delta x=0$, за винятком самої точки $\Delta x=0$. Таким чином, ми маємо право розглянути питання про існування границі зазначеної функції при $\Delta x \to 0$.

Означення. *Похідною функції* $y=f(x)$ у даній фіксованій точці x називається границя при $\Delta x \to 0$ різницевого відношення (3.2) (за умови, що ця границя існує). Похідну функції $y=f(x)$ у точці x будемо позначати символом $y'(x)$ або $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.2)$$

Якщо функція $y=f(x)$ визначена і має похідну для всіх x інтервала (a,b), то ця похідна буде являти собою деяку функцію змінної x, також визначену на інтервалі (a,b).

3.1.1. Фізичний (механічний) зміст похідної.

Розглянемо фізичні поняття додатка похідної.

а) Нехай функція $f(x)$ описує закон руху матеріальної точки. Тоді відношення (3.1) визначає середню швидкість точки за проміжок часу від $(x \div x+\Delta x)$. У такому випадку похідна $f'(x)$, тобто границя різницевих відношень (3.1) при $\Delta x \to 0$ визначає миттєву швидкість точки в момент часу x Отже: *Похідна функції, що описує закон руху, визначає миттєву швидкість точки.*

б) Нехай функція $y=f(x)$ визначає кількість електрики y, що протікає через поперечний переріз провідника за час x. Тоді: *Похідна $f'(x)$ буде визначати силу струму, що проходить через поперечний переріз провідника в момент часу x.*

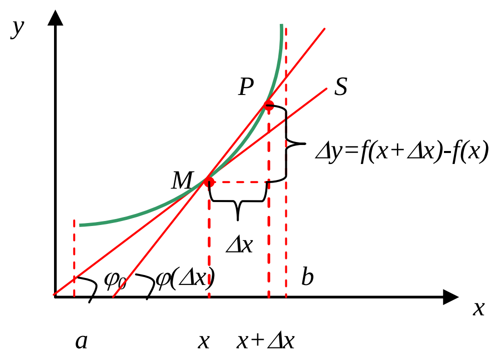


Рис. 3.1.

в) Розглянемо процес нагрівання деякого тіла. Нехай функція $y=f(x)$ визначає кількість тепла (у калоріях) y, яку потрібно передати тілу для нагрівання від x_0 до $x_0+\Delta x$. Тоді: *Похідна $f'(x)$ визначає теплоємність тіла при даній температурі x.*

3.1.2. Геометричний зміст похідної.

Функція $y=f(x)$ на деякому інтервалі (a,b). x– значення аргументу на цьому інтервалі, Δx –

довільний приріст аргумента. $P[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$. Тоді дотична S у точці M– це граничне положення січної MP при $\Delta x \to 0$. Кутовий коефіцієнт MP (тобто тангенс кута до осі OX) дорівнює

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.3}$$

Тоді у границі $\Delta x \to 0$ кут нахилу січної повинен переходити в кут нахилу дотичної Sі у такий спосіб можна зробити висновок: *Похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту, дотичній у точці M до графіка функції $y=f(x)$*

$$tg\varphi_0 = f'(x). \tag{3.4}$$

3.2. Похідна суми, добутку, частки, сталої, добутку сталої на функцію.

Теорема 1. Похідна $const=0$, тобто якщо $y=C$, то$y'=0$, де $C=const$. $y=C$ – пряма, паралельна осі OXі$tg\theta=0$, тобто $f'(x)=0$.

Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто, якщо $y=Cf(x)$, де $C=const$,

$$y'=C f'(x) \tag{3.5}$$

Теорема 3. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює відповідній сумі похідних цих функцій:

$$y=u(x)\pm v(x)\pm w(x) \Rightarrow y'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x). \tag{3.6}$$

Теорема 4. Похідна від добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу плюс добуток першої функції на похідну другої функції, тобто, якщо $y=v(x)\cdot u(x)$, то

$$y' = v'(x)\cdot u(x) + v(x)\cdot u'(x). \tag{3.7}$$

Аналогічно й похідна будь-якоїкількості функцій, тобто

$$y=u_1\cdot u_2\cdot u_3\ldots u_n, \text{ то } y' = u_1'\cdot u_2 \ldots u_n + u_1\cdot u_2'\cdot u_3\ldots u_n + u_1\cdot u_2\cdot u_3'\ldots u_n + \ldots$$

Доведення.$y=u\cdot v \Rightarrow y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$ $(:\Delta x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv' \quad \blacklozenge$$

Теорема 5. Похідна частки від ділення двох функцій, дорівнює дробу, у якого знаменник є квадрат знаменника даного дробу, а чисельник є різниця між добутком знаменника на похідну чисельника й чисельника на похідну знаменника, тобто якщо $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, то

$$y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \tag{3.8}$$

Доведення.

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v\left(v+\Delta v\right)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta v\right)}\Rightarrow \lim,\quad y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2},$$ ♦

3.3. Похідна складної функції.

Нехай дана складна функція $y=f(x)$, тобто така, що її можна представити у вигляді:

$y=F(u)$, де $u=\varphi(x)\Rightarrow y=F[\varphi(x)]$ (3.9)

u називається *проміжним аргументом.*

Теорема. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має у деякій точці x похідну $u'_x=\varphi'\left(x\right)$, а функція $y=F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $y'_u=F'\left(u\right)$, те складна функція $y=F\,[\varphi(x)]$ у точці x також має похідну, що дорівнює

$$\begin{cases} y'_x=F'_u\left(u\right)\cdot\varphi'\left(x\right), \\ y'_x=y'_u\cdot u'_x, \end{cases} \tag{3.10}$$

де замість u має бути підставлений вираз $u=\varphi(x)$. Коротко: похідна складної функції дорівнює добутку похідної даної функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргумента по x.

3.4. Похідна логарифмічної функції. Похідні тригонометричних функцій.

Теорема 1. Похідна від функції $log_a x$ дорівнює $\frac{1}{x}\log_a e$, тобто якщо $y=log_a x$, то

$$y'=\frac{1}{x}\log_a e \tag{3.11}$$

Теорема 2. Похідна від $sinx$ є $cosx$, тобто якщо $y=sinx$, то

$$y'=cosx. \tag{3.12}$$

Доведення. $y+\Delta y=sin(x+\Delta x)$; тоді

$$\Delta y=sin(x+\Delta x)-sinx=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$ ♦

Теорема 3. Похідна від $cosx$ є $-sinx$, тобто якщо $y=cosx$, то

$$y'=-sinx. \tag{3.13}$$

Теорема 4. Похідна від функції *tgx* дорівнює $\frac{1}{\cos^2 x}$, тобто якщо $y=tgx$, то

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3.14}$$

Доведення. Оскільки $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, то $y' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. ♦

$$(tgx)'=1+tg^2x.$$

Теорема 5. Похідна від функції *ctgx* дорівнює $-\frac{1}{\sin^2 x}$, тобто якщо $y=ctgx$, то

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{3.15}$$

$$(ctgx)'= -(1+ctg^2x).$$

3.5. Похідна оберненої, показникової і оберненої тригонометричної функції. Похідна логарифмічної і степеневої функції.

Теорема 1. Нехай функция $f(x)$ в деякому околі точки x_0 зростає (чи спадає) і є неперервною. Нехай, крім того, функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x_0)$, відмінну від нуля. Тоді обернена функція $x=f^{-1}(y)$ визначена в деякому околі відповідної точки $y_0=f(x_0)$ і має похідну, рівну

$$\left\{ f^{-1}(y_0) \right\}' = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{3.16}$$

Доведення. Зауважимо, що для функції $y=f(x)$ існує обернена функція $x=f^{-1}(y)$, визначена в деякому околі точки $y_0=f(x_0)$ і неперервна в цьому околі. Надамо аргументу y цієї оберненої функції в точці y_0 довільного приростуΔy, відмінного від нуля.

Цьому приросту відповідає приріст Δxоберненої функції $x=f^{-1}(y)$, причому в силу зростання (спадання) функції $\Delta x \neq 0$. Таким чином, ми маємо право написати наступну тотожність:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x} \tag{3.17}$$

Нехай тепер у цьому виразі $\Delta y \to 0$, тоді в силу неперервності оберненої функції в точці y_0 і відповідно різницевій формі умови неперервності і $\Delta x \to 0$. Але при $\Delta x \to 0$ знаменник дробу в правій частині, за означенням похідної, має граничне значення $f'(x_0) \neq 0$. Тоді права частина уграниці буде $1/f'(x_0)$. Але тоді і ліва частина при $\Delta y \to 0$ має граничне значення, яке рівне $\{f^{-1}(y_0)\}'$. Отже ми отримали в точці y_0 для її похідної співвідношення $\left\{ f^{-1}(y_0) \right\}' = \frac{1}{f'(x_0)}$. ♦

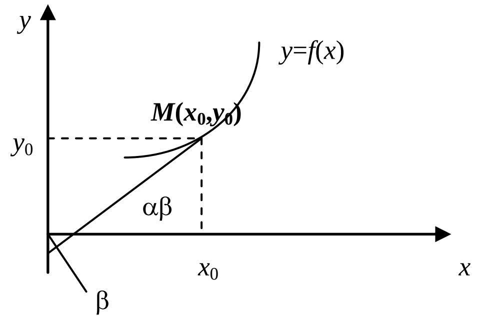


Рис. 3.2.

Геометричний зміст. Графік функції $y=f(x)$, точці x_0 відповідає на графіку точка M, тоді $f'(x_0)=tg\alpha$, а похідна $\{f^{-1}(y_0)\}'=tg\beta$, так як $\alpha+\beta=\pi/2$, то $tg\beta=\dfrac{1}{tg\alpha}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{f^{-1}(y_0)\right\}'=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

3.5.1. Похідна показникової функції.

Показникова функція $y=a^x$, будучи визначеною на нескінченній прямій, є оберненою для логарифмічної функції $x=log_a y$, визначеної на півпрямій $y>0$. Тоді, згідно теореми про обернену функцію, функція $y=a^x$, де в будь-якій точці $x=log_a y$ має похідну $\left(a^x\right)'=\dfrac{1}{\left(\log_a y\right)'}=\dfrac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\dfrac{y}{\log_a e}$, тоді, остаточно

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{3.18}$$

Якщо $a=e$, то

$$(e^x)'=e^x. \tag{3.19}$$

3.5.2. Похідні обернених тригонометричних функцій.

$y=arcsinx$ в інтервалі $-1<x<+1$ – обернена до функції $x=siny$ в інтервалі $-\pi/2<y\leq+\pi/2$. Тоді, згідно теореми про обернену функцію

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\left|\text{але } \sin y=x\right|=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.20}$$

Аналогічне виведення і для $arccosx=y$:

$$\left(\arccos x\right)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.21}$$

$$\left(arctgx\right)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2} \tag{3.22}$$

$$\left(arcctgx\right)'=\frac{1}{(ctgy)'}=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2} \tag{3.23}$$

3.5.3. Поняття похідної логарифмічної функції.

Нехай функція $y=f(x)$ додатна, тоді в цій точці існує $lny=lnf(x)$.

Розглядаючи $lnf(x)$ як складну функцію аргумента x, ми можемо обчислити похідну цієї функції в точці x, приймаючи $y=f(x)$ за проміжний аргумент. Тоді отримаємо:

$$\left[\ln f(x)\right]'=(\ln y)'\cdot y'=\frac{y'}{y} \tag{3.24}$$

Величина, яка визначається цією формулою, називається *логарифмічною похідною* функції $y=f(x)$ в даній точці x.

Розглянемо степенево-показникову функцію $y=u(x)^{v(x)}$ шляхом обчислення логарифмічної похідної. Тоді $lny=v(x)lnu(x)$. Звідси $\left(\ln y\right)'=\dfrac{y'}{y}=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Звідки

$$y' = \left[v'(x) \ln(u) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right] \cdot u(x)^{v(x)} \qquad (3.25)$$

3.5.4. Похідна степеневої функції з будь-яким дійсним показником.

Нехай функція $y=x^{\alpha}$, де α– довільний дійсний показник. Будемо обчислювати для значення x, що належать пів прямій $x>0$, маючи на увазі, що $y=x^{\alpha}>0$, тоді $\ln y=\alpha \ln x \Rightarrow$ $\frac{y'}{y} = \left[\alpha \ln x\right]' = \frac{\alpha}{x}$

або

$$y' = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad (3.26)$$

Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій.

1.	$(x^{\alpha})'=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	9.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$	10.	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
3.	$(a^x)'= a^x \ln a$	11.	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
4.	$(\sin x)'=\cos x$	12.	$(shx)'=chx$
5.	$(\cos x)'= -\sin x$	13.	$(chx)'=shx$
6.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2 x$	14.	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
7.	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+ctg^2 x)$	15.	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
8.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

Тепер ми можемо стверджувати, що **похідна** будь-якої е**лементарноїфункції** являє собою також **елементарну функцію**.

3.6. Похідна функцій, заданих неявно та параметрично.

Нехай значення двох змінних x и y зв'язані між собою деяким рівнянням:

$$F(x,y)=0.. \qquad (3.27)$$

Якщо функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) така, що рівняння (3.27) при підстановці в нього замість $y \Rightarrow f(x)$ звертається в тотожність відносно x, то функція $y=f(x)$ є *неявна функція*, обумовлена рівнянням (3.27).

Наприклад,$x^2+y^2-a^2=0$, $y = \pm\sqrt{a^2-x^2}$ підставимо $x^2+y^2-x^2-a^2=0$.

Зауваження 1. Відзначимо, що терміни «*явна функція*» і «*неявна функція*» характеризують не природу функції, а спосіб задання. Кожна явна функція $y=f(x)$ може бути представлена як неявна: $y-f(x)=0$.

Правило знаходження похідної неявної функції, не перетворюючи її в явну таке. Нехай функція задана рівнянням $x^2+y^2-a^2=0$. Тут y є функція від x, що визначає і цю тотожність.

Взявши похідну по x, вважаючи, що y є функція x, користуючись складною функцією, одержимо:

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Ще приклад:

$$y^6-y-x^2=0 \Rightarrow 6y^5y'-y'-2x=0 \;\; y'=\frac{2x}{6y^5-1}.$$

Зауваження 2. З наведених прикладів випливає, що для знаходження значення похідної неявної функції при даному значенні аргументу x потрібно знати і значення функції y при даному значенні x.

3.6.1. Похідна функції, заданої параметрично.

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$x=\varphi(t),\;\; y=\psi(t),\;\; t_0 \le t \le T. \qquad (3.28)$$

Припустимо, що ці функції мають похідні і, що функція $x=\varphi(t)$ має оберненуt$=\Phi(x)$, що також має похідну. Тоді, визначену параметричними рівняннями функцію $y=f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y=\psi(t)$, $t=\Phi(x)$, де t– проміжний аргумент. Тоді, за правилом складної функції

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t)\cdot \Phi'_x(t) \qquad (3.29)$$

На основі теореми про похідну оберненої функції $\Phi'_1(x)=\dfrac{1}{\varphi'_t(t)}$. Підставляючи, одержимо

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ або } y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (3.30)$$

Введена формула дає можливість знаходити похідну y'_x функції, заданої параметрично, не знаходячи виразу безпосередньої залежності y від x.

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії, заданої

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \text{ у точці } 0\le t\le 2\pi.$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\frac{t}{2}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right).$$

3.7. Диференціал.

3.7.1. Означення диференціала. Формули і правила диференціювання. Використання диференціала для наближених обчислень. Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.

І. Диференціал функції.

Означення. Функція $f(x)$ називається *диференційовною* у точці x, якщо її приріст Δy у цій точці може бути представлений у вигляді:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{3.31}$$

де A не залежить від Δx, але в загальному залежить від x, а $\alpha(\Delta x) = 0(\Delta x)$. Тоді лінійна функція $A\Delta x$ називається *диференціалом* функції $f(x_0)$ і позначається $df(x_0)$ або dy, тоді

$$\Delta y = dy + 0\cdot\Delta x \text{ при } \Delta x \to 0 \quad dy = A\Delta x. \tag{3.32}$$

$y = x^3$, $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, при $\Delta x \to 0$ одержимо $dy = 3x^2 dx$.

Теорема. Для того, щоб функція була диференційовна в деякій точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці похідну, при цьому

$$dy = f'(x)dx. \tag{3.33}$$

ІІ. Формули і правила обчислення диференціалів.

Ми визначили, що диференціал dy функції $y=f(x)$ завжди дорівнює похідній цієї функції $f'(x)$, помноженої на диференціал аргумента dx. У такий спосіб таблиця похідних, виконана нами раніше, дає таблицю диференціалів:

1.	$d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$	8.	$d\left(\arcsin x\right) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$d\left(\log x\right) = \dfrac{1}{x}\log_a e dx$	9.	$d\left(\arccos x\right) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$d(a^x) = a^x \ln a dx$	10.	$d\left(arctgx\right) = \dfrac{dx}{1+x^2}$
4.	$d(\sin x) = \cos x dx$	11.	$d\left(arcctgx\right) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$
5.	$d(\cos x) = -\sin x dx$	12.	$d(u \pm v) = du \pm dv$
6.	$d\left(tgx\right) = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \left(1+tg^2 x\right)dx$	13.	$d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$
7.	$d\left(ctgx\right) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\left(1+ctg^2 x\right)dx$	14.	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

ІІІ. Використання диференціала для наближених обчислень.

Хоча диференціал dy функції $y=f(x)$ не дорівнює Δy цієї функції, але з точністю до нескінченно малої більш високого порядку Δx справедлива наближена рівність:

$$\Delta y \cong dy. \tag{3.34}$$

Відносна величина $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ стає як завгодно малою при $\Delta x \to 0$. Формула (3.34) дозволяє приблизно замінити приріст Δy функції $f(x)$ її диференціалом dy. Ми можемо додати наближеній рівності (3.34) наступний вигляд:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x \text{ або } f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{3.35}$$

Тоді по формулі (3.35) функція $f(x)$, для значень аргументу близьких до x (тобто для малих Δx) приблизно заміняється лінійною функцією.

Зокрема, за допомогою цього може бути отриманий ряд вже відомих наближених формул:

1.	$\left(1+\Delta x\right)^{1/n} \cong 1+\dfrac{\Delta x}{n} : = \Delta x \to 0.$	3.	$e^{\Delta x} \cong 1+\Delta x$
2.	$\sin\Delta x \cong \Delta x : \Delta x \to 0$	4.	$\ln(1+\Delta x) \cong \Delta x$

$$y=\sqrt[3]{26,94},\ x_0=27,\ \Delta x=-0,06,$$

$$y=y\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x=3+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\left(-0,06\right)=3-\frac{0,06}{27}=3-\frac{0,02}{9}=2,998.$$

IV. Диференціал і похідні вищих порядків.

Може бути, що похідна $f'(x)$ є диференційовною функцією в деякій точці x, тобто може мати похідну. Тоді вона називається *другою похідною* або *похідною другого порядку*і позначається: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ або $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Послідовно можна ввести поняття похідної 3-го, 4-го, …, n-го порядку. Тоді n-*а* похідна (або похідній n-го порядку) функції $y=f(x)$ у точці x називається така, що *існує при взятті похідноїпразів* від функції $y=f(x)$ і позначається:

$$f^{(n)}(x) \quad \text{або} \quad y^{(n)}(x) \quad \text{або} \quad \frac{d^ny}{dx^n} \tag{3.36}$$

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'.$$

Диференціали вищих порядків визначаються в повній аналогії з похідними вищих порядків. Другий диференціал d^2y функції $y=f(x)$ визначається як диференціал від диференціала першого порядку:

$$d^2y=d(dy)\ \ldots\ d^{(n)}(y)=d(d^{(n-1)}y). \tag{3.37}$$

При цьому передбачається існування відповідних диференціалів

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx+y'd^2x=y''(dx)^2+y'd^2x.$$

V. Основні теореми диференціального числення.

По означенню, функція $f(x)$ досягає в точці $x=c$ локального max (min), якщо існує окіл цієї точки $U(c)=(c-\delta,\ c+\delta)$, на якому виконується нерівність

$$f(c)\geq f(x)\ \forall x\in U(c),$$

відповідно

$$f(c)\leq f(x) \quad \forall x\in U(c). \tag{3.38}$$

Локальні max (min) називаються *локальним екстремумом*. Точка C називається *точкою локального екстремуму*.

Зауваження.Якщо функція $f(x)$неперервна на відрізку $[a,b]$ і досягає на ньому max (min) у точках, що належать цьому інтервалу, то ці точки є в той же час точками локального екстремуму$f(x)$. Але, якщо функція досягає max (min) в одній з кінцевих точок інтервалу, то вона не є в цій точці локальним екстремумом, тому що не визначена повною мірою в околі – праворуч і ліворуч від точки.

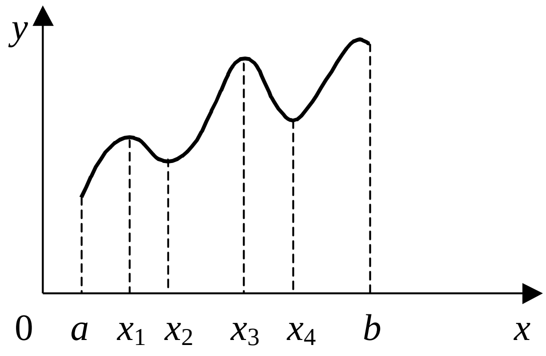


Рис.3.3.

На рис. 3.3: точки x_1, x_3 – локальний max функції $f(x)$;
x_2, x_4 – локальний min функції $f(x)$.

Теорема Ферма(*П'єр Ферма (1601–1665) – французький математик, засновник аналітичної геометрії й теорії чисел (теорема Ферма). Праці по теорії ймовірностей, обчисленню нескінченно малих й оптиці*). Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці C і досягає в цій точці локального екстремуму, то $f'(c)=0$.

Теорема Ролля(*Мішель Ролль (1652–1719) – французький математик. Праці по алгебраїчних рівняннях)*. Якщо функція $f(x)$неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка й на кінцях $x=a$і$x=b$ обертається в нуль $[f(a)=f(b)=0]$, то всередині відрізка $[a,b]$ існує, принаймні, точка $x=c$, $a<c<b$, у якій $f'(x)$ перетворюється в нуль, тобто ($f'(x)=0$).

Ця теорема справедлива і для функції, у якої на кінцях $[a,b]$$f(a)=f(b)$.

Теорема Лагранжа(*Жозеф Луї Лагранж (1736–1813) – французький математик і механік. Праці по варіаційному численню, теорії чисел, алгебрі, диференціальним рівнянням і т.д.)*. Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка, то усередині відрізка $[a,b]$ знайдеться принаймні одна точка c, $a<c<b$, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Теорема Коші(*Огюстен Луї Коші (1789–1857) – французький математик; теорія аналітичних функцій, диференціальні рівняння, математична фізика, теорія чисел, геометрія, математичний аналіз).* Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – дві функції, неперервні на інтервалі $[a,b]$ і диференційовні всередині нього, причому $\varphi'(x)$ ніде усередині інтервалу не дорівнює 0, то всередині інтервала $[a,b]$ знайдеться точка $x=c$, $a<c<b$, що $\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}$.

3.7.2. Розкриття невизначеностей. Формула Тейлора.

І. Невизначеність виду 0/0.

Теорема 1(правило Лопіталя)(*Гійом Лопіталь (1661–1704) – французький математик, автор першого друкованого підручника по диференціальному численню)*. Нехай дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені й диференційовні всюди в деякому околі точки a, за винятком самої точки a. І нехай

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \tag{3.39}$$

і $\varphi'(x)\neq 0$ у зазначеному вище околі точки a. Тоді, якщо існує (скінченне або нескінченне) граничне значення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує й граничне значення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і справедлива формула:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{3.40}$$

і, можна далі: $\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

Ця теорема вірна й при $x\to\infty$.

II. Невизначеність виду ∞/∞.

Будемо говорити, що відношення 2-х функцій $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ являє собою при $x\to a$ невизначеність виду ∞/∞, якщо:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \tag{3.41}$$

Для розкриття цієї невизначеності, тобто для обчислення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, справедливе *твердження*: якщо у формулюванні теореми 1 замінити вимоги $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ на умову (5.41), то теорема виявиться справедливою.

III. Розкриття невизначеностей інших видів.

Крім вивчених вище невизначеностей виду 0/0 й ∞/∞, часто зустрічаються інші види: $0\times\infty$, $\infty\times\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} і т.д. Всі ці невизначеності необхідно звести до виду, вивченому нами, тобто до 0/0 або ∞/∞ шляхом алгебраїчного перетворення.

IV. Формула і теорема Тейлора (*Тейлор Брук (1685–1731) – англійський математик. Знайшов формулу для розкладання функцій у статечні ряди*).

Ця формула є однією з основних формул математичного аналізу й має численні додатки як в аналізі, так й у складних дисциплінах.

Теорема Тейлора. Нехай функція $f(x)$ має в деякому околі точки a похідну порядку $(n+1)$, де n – будь-який фіксований номер. Нехай далі x – будь-яке значення аргумента із зазначеного околу, p – довільне додатне число. Тоді, між точками aіx знайдеться точка c така, що справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{3.42}$$

де

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^p (x-c)^{n-p+1}}{n\,!\,p} f_{(c)}^{(n+1)} \tag{3.43}$$

Формула (5.42) називається *формулою Тейлора* (із центром у точці a), а (3.43) називається *залишковим членом*; він може бути записаний й в іншому вигляді. Прийнято називати залишковий член, записаний у вигляді (5.43), *залишковим членом у загальній формі* або формі *Шлемільха-Роша*.

Формула Тейлора в центром у точці a=0 називається *формулою Маклорена* (*Колін Маклорен (1698–1746) – шотландський математик, праці по математичному аналізу, теорії кривих, механіці*).

3.7.3. Дослідження функції однієї змінної за допомогою першої й другої похідних.

I. Ознаки сталості зростання і спадання функції.

Теорема 1. Якщо у всіх точках проміжку $a<x<b$ похідна $f'(x) = 0$, то функція $f(x)$ зберігає в цьому проміжку постійне значення, тобто є відрізок горизонтальної прямої.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$– неперервна в проміжку $a\leq x\leq b$. Якщо у всіх внутрішніх його точках $f'(x)>0$, то функція $f(x)$ у даному проміжку зростає.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$– неперервна на (a,b), $a\leq x\leq b$. Якщо у всіх точках, внутрішніх $f'(x)<0$, то функція $f(x)$ у даному проміжку спадає.

Умови теорем 1, 2, 3 є достатніми, а необхідними і умови 1.

II. Екстремум функції.

Означення.Говорять, що $f(x)$має min у точці c, якщо $f(c)<f(x)$у всіх точках, що лежать по обох сторонах від точки c у достатній близькості від неї. Говорять, що $f(x)$має max у точці c, якщо $f(c)>f(x)$у всіх точках, що лежать по обох сторонах від точки c у достатній близькості від неї. Максимум і мінімум поєднуються поняттям *екстремум.*

Необхідна ознака екстремума. Для того, щоб функція $f(x)$ мала екстремум у точці c, необхідно щоб $f'(x)$ оберталася в нуль або ∞, або зовсім не існувала, але ця ознака не є достатньою.

1-ша достатня ознака наявності й відсутності екстремума.

Теорема 1. Якщо в деякому околі (a,b) точки $x_0 f'(x)>0$ ліворуч від точки x_0і$f'(x)<0$ праворуч від x_0, то функція $f(x)$ має max.

Якщо ж у деякому околі (a,b) точки $x_0 f'(x)<0$ ліворуч і$f'(x)>0$ праворуч, то $f(x)$ має min.

Таким чином, для того щоб неперервна функція в точці x_0 мала екстремум, необхідно, щоб знак похідної в цій точці змінився на протилежний, у самій же точці вона може бути рівна 0, ∞ або не існувати.

2-га достатня ознака екстремума.

Якщо функція $f(x)$ у критичній точці c диференційовна двічі, то можна скористатися наступною теоремою:

Теорема. Нехай у точці $c f'(x)$ функції $f(x)$ обертається в нуль:$f'(c)$ =0.Якщо при цьому $f''(c)>0$, то в точці $c f(x)\to min$, якщо при $f''(c)<0$, то в точці $c f(x)\to max$.

Практичні правила
для знаходження всіх екстремумів функції $f(x)$в $[a,b]$.

Функція повинна бути неперервною в цьому проміжку $[a,b]$, число критичних точок повинно бути обмежене, тоді для відшукання всіх *max* й *min* функції в $[a,b]$:

1. Знаходимо всі точки проміжку (a,b), де $f'(x)=0$, ∞ або не існує. Якщо їх немає, то немає і екстремумів, якщо вони є, нумеруємо їх у порядку зростання: $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$... .

2. У всіх інших точках інтервалу (a,b) існує кінцева похідна $f'(x)\neq 0$. При цьому, якщо в яких-небудь 2-х точках kіl $f'(k)$ і $f'(l)$ є протилежні знаки, то між цими точками повинна щонайменше лежати одна критична точка. Тоді усередині кожної з ділянок (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_{n-1}, x_n), (x,k) похідна $f'(x)$ зберігає незмінний знак. Якщо $f'(x)>0$, то функція на цій ділянці зростає, якщо $f'(x)<0$ – то спадає.

3. Встановлюємо наявність екстремума, або відсутність, у кожній із критичних точок x_1, x_2, …, x_n на підставі вище викладеного.

Зауваження 1.З цього слідує, що точки *max*і*min* чергуються один з одним і що вони розбивають проміжок (a,b) на часткові проміжки, у кожному з яких функція $f(x)$ або зростає або спадає чергуючись.

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ монотонна в деякому проміжку (m,n), то при будь-якому подовженні цього проміжку втрачає монотонності (або зовсім втрачає зміст), то говорять, що (m,n) є **проміжокмонотонності** функції $f(x)$. Таким чином, точки екстремума функції $f(x)$, заданої на (a,b), розбивають його на проміжки монотонності функції $f(x)$.

Зауваження 3. У процесі відшукання екстремумів корисно заносити результати дослідження в таблицю.

III. Інтервали опуклості й ввігнутості. Точки перегину.

А. Характер опуклості.

Означення. *Говорять, що дуга AB функції y=f(x) увігнута угору (угнута), якщо всі точки цієї дуги лежать вище будь-якій її дотичній MT, і ввігнута униз (опукла) CD, якщо всі точки лежать нижче будь-якої дотичної.*

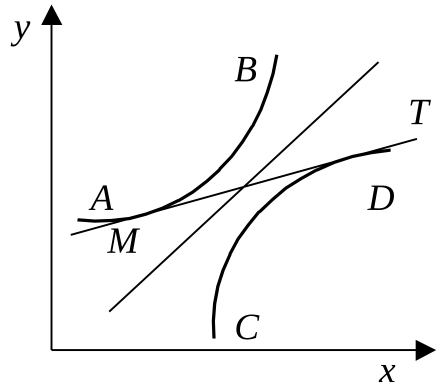


Рис.3.4.

Теорема.Для того, щоб дуга *AB* лінії $y=f(x)$ була ввігнута угору (униз), необхідно і достатньо, щоб похідна $f'(x)$ у відповідному проміжку зростала (спадала).

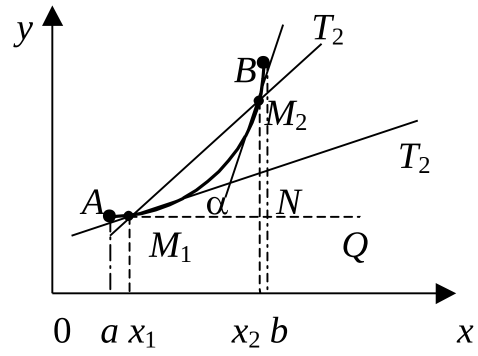


Рис.3.5.

Доведення. Необхідність. Нехай дана дуга AB, увігнута угору. Візьмемо в проміжку (a,b) дві довільні точки x_1 і x_2. Проведемо M_1T_1 і M_2T_2 і M_1Q і M_2 вище M_1, $QM_2>QN$:

$$QM_2=f(x_2)-f(x_1) : QN=M_1Q \cdot \alpha=M_1Q \cdot f'(x_1)=(x_2-x_1) \cdot f'(x_1);$$

$$\text{але } f(x_2)-f(x_1)>(x_2-x_1)f'(x_1) : (x_2-x_1)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'(x_1),$$

тобто кутовий коефіцієнт M_1M_2 більше кутового коефіцієнта дотичної M_1T_1.

Тому що точки взяті довільно, те й x_1 і x_2 можна поміняти місцями:

$$f(x_1)-f(x_2)>(x_1-x_2)f'(x_2) : (x_1-x_2) \quad [\text{але } (x_1-x_2)<0],$$

то одержимо:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<f'(x_2) \text{ або } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(x_2),$$

тобто $f'(x_2) > f'(x_1)$. Тому що точки взяті довільно, то остання нерівність означає, що похідна $f'(x)$ зростає в проміжку (a,b). Аналогічно доводиться, що якщо дуга AB увігнута вниз, то похідна $f'(x)$ убуває в (a,b).

Достатність.Нехай похідна $f'(x)$ зростає в проміжку (a,b), і нехай x_1 і x_2 дві довільно взяті точки цього проміжку. Потрібно довести, що точка$M_2(x_2,y_2)$ лежить вище дотичної M_1T_1 або довести нерівність:

$$QM_2>QN \text{ або } QM_2-QN>0,$$

але $QM_2-QN=[f(x_2)-f(x_1)]-(x_2-x_1)f'(x_1)$.

Застосуємо до останньої різниці $[f(x_2)-f(x_1)]$ формули кінцевих приростів, c' – точка між x_1 і x_2:

$$f(x_2)-f(x_1)= (x_2-x_1)f'(x_1),$$

тоді $QM_2-QN=(x_2-x_1)[\, f'(c)-f'(x_1)]$.

За умовою $f'(x)$ зростає, значить $f'(c)- f'(x)$ має той же знак, що й $(c-x_1)$, а це значить, що такий же знак й (x_2-x_1), тобто $QM_2-QN>0$, що й було потрібно довести.

Зауваження. Якщо у внутрішніх точках проміжку (a,b) друга похідна $f''(x)>0$, то відповідна дуга AB лінії $f(x)$ увігнута угору, якщо $f''(x)<0$ – то дуга AB увігнута вниз.

Б. Точки перегину.

Означення.Якщо точка C лінії AB, де ця лінія має дотичну CT, служить границею двох дуг AC і CB, звернених увігнутістю в протилежні сторони, то точка C називається *точкою перегину* лінії AB.

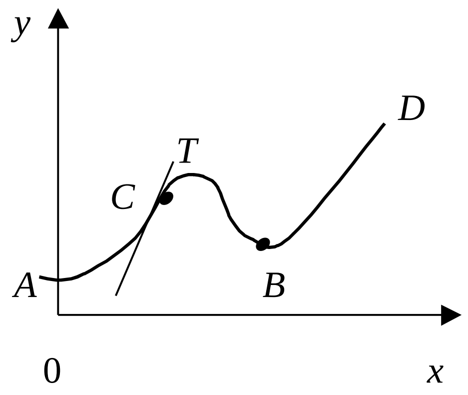


Рис.3.6.

Зауваження 1. Точка B, де лінія $ACBD$ не має двосторонню дотичну, не вважається точкою перегину, хоча вона й служить границею дуг CB й BD, увігнутих в протилежні сторони.

Зауваження 2. Дотична CT, проведена через точку перегину, перетинає лінію AB, тому що дуги AC й AB звернені увігнутістю в різні сторони, то одна з них повинна лежати вище дотичної, інша нижче.

Необхідна ознака точки перегину.

Для того, щоб у точці C лінія $f(x)$ мала перегин, необхідно, щоб у відповідній точці $x=c$ друга похідна $f''(x)$ =0 або ∞ або не існувала. Ця точка називається *критичною точкою* по другій похідній.

Правило для відшукання точок перегину лінії $y=f(x)$
і для судження про характер її увігнутості.

Щоб знайти усі точки перегину функції $y=f(x)$ у проміжку (a,b) і визначити на яких ділянках ця лінія увігнута угору або вниз, знаходимо в такий спосіб.

1. Знаходимо в проміжку (a,b) усі критичні точки по другій похідній. Нумеруємо їх у порядку зростання:

$$a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b.$$

Абсциси усіх точок перегину повинні міститися серед цих критичних точок.

2. У всіх точках проміжку (a,b), де існує кінцева друга похідна $f''(x)$, відмінна від нуля, вона зберігає незмінний знак усередині кожної з ділянок (a,c_1), (c_1, c_2), …, (c_n,b).

Якщо цей знак більше 0, то $y=f(x)$ на цій ділянці увігнута угору, якщо менше 0, то увігнута вниз.

3. Встановлюємо наявність або відсутність перегину в кожній із точок c_1, c_2, …, c_n. Якщо при переході через точку c_i напрямок увігнутості змінюється на протилежний, а в самій точці c_i лінії $y=f(x)$має дотичну (тобто перша похідна $f'(x)$ існує), то c_i є точка перегину. Якщо хоча б одна із цих умов не виконана, то перегину немає.

3.7.4. Асимптоти.

1. Похилі асимптоти.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(a;\ +\infty)$ або в інтервалі $(-\infty;\ a)$. Пряму $y = kx + b$ називатимемо *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо виконується умова

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0.$$

Геометрична ілюстрація (рис. 3.7). Різниця ординат кривої $y = f(x)$ і прямої $y = kx + b$ прямує до нуля, коли їх абсциси прямують до нескінченності: $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$.

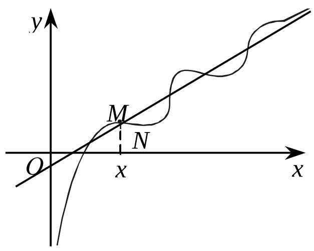


Рис. 3.7.

Теорема. Крива $y = f(x)$, $x \in (a;\ +\infty)$ тоді і тільки тоді має асимптоту $y = kx + b$, коли існують скінченні границі

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right). \tag{3.44}$$

Доведення. <u>Необхідність.</u> Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, тобто виконується умова

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right)x\right) = 0.$$

Це можливо лише у випадку:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0,$$

звідки

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0,\ k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

причому k – скінченне за умовою, оскільки пряму $y = kx + b$ задано. Далі за умовою $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0$ знаходимо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) - b = 0$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right)$, причому b – скінченне.

<u>Достатність.</u> Нехай тепер виконується умова, де k і b – скінченні границі, тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) - b = b - b = 0$, тобто, за означенням $y = kx + b$ – асимптота кривої $y = f(x)$.

Доведення теореми у випадку, коли $x \to -\infty$, здійснюється аналогічно, потрібно лише замінити $x \to +\infty$ на $x \to -\infty$.

Знайти асимптоти функції $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Розв'язування. У точці $x=-1$ функція має розрив другого роду, тому $x=-1$ – вертикальна асимптота. Знайдемо похилу асимптоту. За теоремою

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x^2+1\right)}{x\left(x+1\right)}=1,\qquad k=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2-1-x}{x+1}=-1,\qquad b=-1.$$

Отже, пряма $y=x-1$ є асимптотою функції при $x\to\pm\infty$ (рис.5.8).

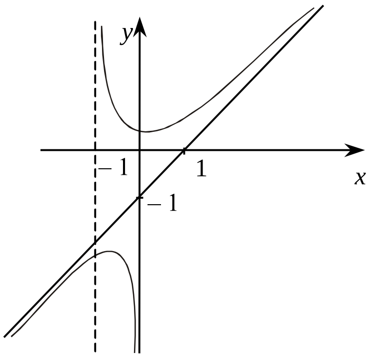


Рис. 3.8

Чи має функція $y=x\cos x$ похилі асимптоти?

Розв'язування. Функція $y=x\cos x$ похилих асимптот не має, оскільки не існує границі $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

Знайти похилі асимптоти кривої $y=10x-\arcsin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язування. Областю визначення кривої є частина площини, де $|x|\geq 1$. Застосовуючи теорему про побудову асимптот, дістаємо:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(10-\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{x}\right)=10,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(10x-\arcsin\frac{1}{x}-10x\right)=0.$$

Отже, пряма $y=10x$ є асимптотою кривої при $x\to\pm\infty$.

2. Горизонтальні асимптоти. Якщо у похилій асимптоті $y=kx+b$ функції $y=f\left(x\right)$ маємо $k=0$, то таку похилу асимптоту називають *горизонтальною асимптотою* функції. Отже, горизонтальна асимптота – частинний випадок похилої – відшукується як похила асимптота за умов:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=0,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)$$

і має вигляд $y=b$. До речі, умову $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ можна не перевіряти, якщо $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ – скінченна границя, оскільки в такому разі границя $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ завжди дорівнює нулю. Звідси можемо зробити висновок.

Зауваження. Для того щоб пряма $y=b$ була горизонтальною асимптотою функції $y=f(x)$, $x\in(a;\ +\infty)$, $x\in(-\infty;\ a)$, необхідно і достатньо, щоб існувала скінченна границя $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

[redacted]: Знайти горизонтальні асимптоти функції $y=\operatorname{arctg} x$.

Розв'язування. Маємо

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)=\frac{\pi}{2}, \qquad b=\lim_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg} x)=-\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ горизонтальні асимптоти (3.9).

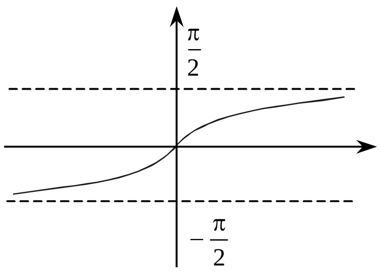


Рис. 3.9

3.8. Загальний план дослідження функції та побудова графіка.

1. Знайти область визначення та значення функції, заданої формулою, якщо таку область не зазначено.

2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3. З'ясувати точки перетину функції з осями координат.

4. Дослідити функцію на неперервність.

5. Знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують).

6. З'ясувати, як функція поводиться на кінцях кожного з проміжків області визначення (знайти границі функції на кінцях цих проміжків, якщо вони є).

7.Дослідити функцію на диференційовність.

8.Дослідити функцію на монотонність та екстремуми. Знайти екстремуми і значення функції в точках екстремуму.

9.Дослідити функцію на опуклість (угнутість): знайти інтервали опуклості (вгнутості), а також точки перегину функції.

10.Знайти найбільше і найменше значення функції (якщо вони існують).

11. Побудувати графік функції.

Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

1. Функція не існує в точках $x=\pm 1$. Тому область визначення функції

$$D(x)=\left\{x \,\middle|\, x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)\right\}.$$

2. Функція непарна, оскільки $y(-x)=\dfrac{-x^3}{1-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{1-x^2}=-y(x)$. З огляду на непарність функції достатньо побудувати її графік лише при $x\geq 0$.

Функція неперіодична.

3. Точки перетину з осями координат:

з віссю *Ox*: $y=0\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0$

(0; 0) – точка перетину з віссю *Ox*.

з віссю *Oy*: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{0^3}{1-0^2}=0.$

(0; 0) – точка перетину з віссю *Oy*.

4. Функція невизначена в точці $x=\pm 1$, тому ці точки є «підозрілими» на розрив. Знайдемо односторонні границі в точці $x=\pm 1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to 1-0\\ x<1\\ 1-x^2\to 0+\\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to +\infty\end{array}\right|=+\infty;\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to 1+0\\ x>1\\ 1-x^2\to 0-\\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to -\infty\end{array}\right|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to -1-0\\ x<-1\\ 1-x^2\to 0-\\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to +\infty\end{array}\right|=+\infty;\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to -1+0\\ x>-1\\ 1-x^2\to 0+\\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to -\infty\end{array}\right|=-\infty.$$

Точки $x=\pm 1$ — точки розриву другого роду.

$D(x)=\left\{x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)\right\}$ — область неперервності функції.

5. Знаходимо асимптоти функції. Насамперед з'ясовуємо, що прямі $x=\pm 1-$ вертикальні асимптоти. (Це випливає з означення вертикальних асимптот та п. 4.)

Шукаємо похилу асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} y/x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{\left(1-x^2\right)x}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+3\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Отже, $y=-x-$ похила асимптота.

6. В п. 4 знайдені односторонні границі функції в точках $x=\pm 1$. Залишилось знайти границі функції, коли $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty.$$

7. Знайдемо першу похідну від функції y (вона існує на $D(x)$):

$$y' = \frac{3x^2\left(1-x^2\right) - x^3\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

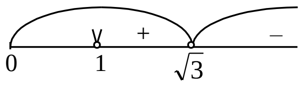
8. Дослідимо функцію на монотонність і знайдемо точки екстремуму. Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо першу похідну до нуля:

$$y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2 - x^4 = 0,$$

$x^2\left(3-x^2\right) = 0$

$x_{1,2} = 0, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$

Зважаючи на зауваження п. 2, розглядатимемо дослідження функції при $x \ge 0$.



$y' > 0$, коли $x \in (0;1) \cup \left(1;\sqrt{3}\right)$,

$y' < 0$, коли $x \in \left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Тому $x_{\max} = \sqrt{3}$ – точка максимуму, $x_{\min} = -\sqrt{3}$ — точка мінімуму.

$$f\left(x_{\max}\right) = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$f\left(x_{\min}\right) = f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

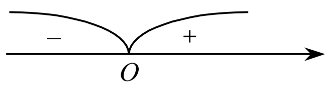
9. Знайдемо другу похідну функції y:

$$y'' = \left(\frac{3x^2 - x^4}{\left(1-x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(3x^2 - x^4\right)'\left(1-x^2\right)^2 - \left(3x^2 - x^4\right)\cdot 2\left(1-x^2\right)\cdot\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(6x - 4x^3\right)\left(1-x^2\right)^2 + 4x\left(1-x^2\right)\left(3x^2 - x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{2x\left(3-2x^2\right)\left(1-x^2\right) + 4x\left(3x^2 - x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\left(3 - 2x^2 - 3x^2 + 2x^4 + 6x^2 - 2x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Точка x=0 може бути точкою перегину, бо $y''(0) = 0$. Перевіримо це за критерієм. Визначимо знак y'' в околі точки $x = 0$:



Друга похідна змінює в точці x=0 свій знак, тому функція $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ має точку перегину $x = 0$, на проміжку (0; 1) функція угнута, (1, +∞) – функція опукла.

10. Найбільше та найменше значення функції не існують.

11. Побудуємо графік функції, враховуючи дослідження.

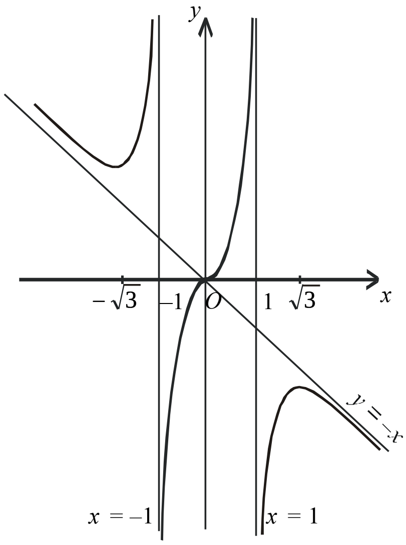


Рис. 3.10

3.8.1. Дослідження та побудова графіка функції, заданої параметрично.

Функцію, задану параметрично, досліджують так само, як явно задані функції. Обчислюють першу та другу похідні і за їх допомогою будують графік.

Побудувати графік функції $\begin{cases} y = 1 - \cos t \\ x = t - \sin t. \end{cases}$

Розв'язування. Зауважимо, що в разі заміни t на $t + 2\pi$ змінна x набуває приросту 2π:

$$\begin{cases} y(t + 2\pi) = y(t); \\ x(t + 2\pi) = t + 2\pi - \sin t = x(t) + 2\pi. \end{cases}$$

Тому достатньо побудувати частину графіка при $t \in [0,\ 2\pi]$. Решту графіка дістаємо, перенісши вісь x.

1. При скінченних значеннях t значення x, y обмежені. Оскільки величина y завжди обмежена, то вертикальних асимптот немає. Відшукуємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1 - \cos t}{t - \sin t} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{t \to \pm\infty} (1 - \cos t) \text{ не існує;}$$

похилих асимптот також немає.

2. Знайдемо проміжки додатності та від’ємності функцій

$$y = 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \geq 0,\ t = [0,\ \ 2\pi).$$

3.Знайдемо проміжки зростання та спадання функцій. Знайдемо критичну точку.

$$y'_x=\frac{d(1-\cos t)}{d(t-\sin t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Якщо $t = 0$, $t = 2\pi$, то $\sin\frac{t}{2}=0$.

Отже, y'_x при $t = 0$, $t = 2\pi$ не існує.

При $t = \pi \Rightarrow \cos\frac{t}{2}=0$. Отже, $y'_x=0$ при $t = \pi$.

Визначаємо характер критичних точок.

У загальному випадку зі зростанням параметра t функція x зростає:

у точці $t=0$ при $t<0 \Rightarrow y'_x<0$ і при $t>0 \Rightarrow y'>0$, отже, у точці $t = 0$ – маємо *min*;

у точці $t=\pi$ при $t<\pi \Rightarrow y'_x>0$ при $t>\pi \Rightarrow y'_x<0$, отже, у точці $t = \pi$ – маємо *max*;

у точці $t=2\pi$ при $t<2\pi \Rightarrow y'_x<0$ при $t>2\pi \Rightarrow y'_x<0$, отже, у точці $t = 2$– маємо *min*;

у точках $t=0$, $t>2\pi$ маємо вертикальну дотичну, а в точці $t=\pi$ — горизонтальну.

4. Обчислюємо екстремальні значення функції:

$t = 0$	$y = 0$	$x = 0$;
$t = \pi$	$y = 2$	$x = \pi$;
$t = 2\pi$	$y = 0$	$x = 2\pi$.

5. Знаходимо проміжки опуклості та угнутості.

Обчислюємо другу похідну:

$$y''_x=\frac{d\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{d(t-\sin t)}=\frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\cos t}=-\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}<0.$$

Похідна скрізь від'ємна, крива опукла (рис. 5.11).

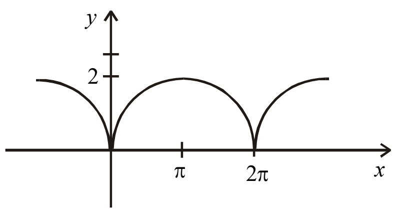


Рис. 3.11.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Для функції $f(x)=2x^2-7$ знайти приріст, що відповідає переходу незалежної змінної від значення $x = 3$ до значення $x = 5$.

2. Побудувати графік функції $y = 2x + 3$. Надаючи абсцисі послідовно значення $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, знайти приріст ординат: $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, $y_4 - y_3$, $y_3 - y_1$, $y_2 - y_1$, $y_2 - y_1$ і відношення приростів: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, $\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$. З'ясувати геометричний зміст результату.

3. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$. Надаючи абсцисі послідовно значення $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5,$ знайти приріст ординат $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, $y_4 - y_3$, $y_3 - y_1$ і відношення приросту $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

4. Знайти відношення приросту функції до приросту незалежної змінної $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1}$ у кожному з таких випадків:

	1	2	3	4	5	6
y	$23 - 5x$	$3x - 10$		$x^2 + 1$	$1 : x$	$\log_{10}x$
x_1	2	1	2	– 2	5	7
x_2	4	2	1	– 3	6	14

5. Чи можна визначити Δy, знаючи лише, що $\Delta x = 3$, якщо: 1) $y = 4x - 9$, 2) $y = x^2$, 3) $y = \frac{1}{x}$? Проілюструвати відповідь рисунком.

Продиференціювати функції (6–14):

6. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$ $\qquad$ $y' = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

7. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. $\qquad$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$.

8. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$. $\qquad$ $y' = \frac{2}{3}\left[\left(x+1\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(x-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]$.

9. $y = 5x^4 + 3x^2 - 6$; $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 6x$.

10. $y = 3cx^2 - 8dx + 5e$; $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 6cx - 8d$.

11. $y = x^{a+b}$; $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = (a+b)x^{a+b-1}$.

12. $y = x^n + nx + n$; $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + n$.

13. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$; $\qquad f'(x)=2x^2-3x$.

14. $f(x)=(a+b)x^2+cx+d$; $\qquad f'(x)=2(a+b)x+c$.

Довести: (15–26):

15. $\frac{d}{dx}(a+bx+cx^2)=b+2cx$.

16. $\frac{d}{dy}(5y^m-3y+6)=5my^{m-1}-3$.

17. $\frac{d}{dx}(2x^{-2}+3x^{-3})=-4x^{-3}-9x^{-4}$.

18. $\frac{d}{ds}(3s^{-4}-s)=-12s^{-5}-1$.

19. $\frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{1}{2}}+x^2\right)=2x^{-\frac{1}{2}}+2x$.

20. $\frac{d}{dy}\left(y^{-2}-4y^{-\frac{1}{2}}\right)=-2y^{-3}+2y^{-\frac{3}{2}}$.

21. $\frac{d}{dx}(2x^3+5)=6x^2$.

22. $\frac{d}{dt}(3t^5-2t^2)=15t^4-4t$.

23. $\frac{d}{d\theta}(a\theta^4+b\theta)=4a\theta^3+b$.

24. $\frac{d}{d\alpha}\left(5-2\alpha^{\frac{3}{2}}\right)=-3\alpha^{\frac{1}{2}}$.

25. $\frac{d}{dt}\left(9t^{\frac{5}{3}}+t^{-1}\right)=15t^{\frac{2}{3}}-t^{-2}$.

26. $\frac{d}{dx}(2x^{12}-x^9)=24x^{11}-9x^8$.

Продиференціювати функції (27–39):

27. $r=c\theta^3+d\theta^2+e\theta$; $\qquad \frac{dr}{d\theta}=3c\theta^2+2d\theta+e$.

28. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$; $\qquad \frac{dy}{dx}=21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$.

29. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$; $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$.

30. $y=\frac{a+bx+cx^2}{x}$; $\qquad \frac{dy}{dx}=c-\frac{a}{x^2}$.

31. $y=\frac{(x-1)^3}{x^{\frac{1}{3}}}$; $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

32. $y=\frac{x^{\frac{5}{2}}-x-x^{\frac{1}{2}}+a}{x^{\frac{3}{2}}}$; $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2x^{\frac{5}{2}}+x+2x^{\frac{1}{2}}-3a}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

33. $y=(2x^3+x^2-5)^3$. $\qquad \dfrac{dy}{dx}=6x(3x+1)(2x^3+x^2-5)^2$.

34. $f(x)=(a+bx^2)^{\frac{5}{4}}$; $\qquad f'(x)=\dfrac{5bx}{2}(a+bx^2)^{\frac{1}{4}}$.

35. $f(x)=(1+4x^3)(1+2x^2)$; $\qquad f'(x)=4x(1-3x+10x^3)$.

36. $f(x)=(a+x)\sqrt{a-x}$. $\qquad f'(x)=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

37. $f(x)=(a+x)^m(b+x)^n$; $\qquad f'(x)=(a+x)^m(b+x)^n\left[\dfrac{m}{a+x}+\dfrac{n}{b-x}\right]$.

38. $y=\dfrac{1}{x^n}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

39. $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Обчислити похідні (40–47).

40. а) $\dfrac{d}{dx}(2x^3-4x+6)$; д) $\dfrac{d}{dt}(b+at^2)^{\frac{1}{2}}$; з) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)$;

б) $\dfrac{d}{dt}(at^7+bt^5-9)$; е) $\dfrac{d}{dx}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$; и) $\dfrac{d}{dt}(5+2t)^{\frac{9}{2}}$;

в) $\dfrac{d}{d\theta}\left(3\theta^{\frac{3}{2}}-2\theta^{\frac{1}{2}}+6\theta\right)$; є) $\dfrac{d}{d\phi}\left(4-\phi^{\frac{2}{5}}\right)$; і) $\dfrac{d}{dt}\sqrt{a+b\sqrt{s}}$;

г) $\dfrac{d}{dx}(2x^3+x)^{\frac{5}{3}}$; ж) $\dfrac{d}{dt}\sqrt{1+9t^2}$; ї) $\dfrac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{5}{3}}\right)$.

41. $y=\dfrac{2x^4}{b^2-x^2}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8b^2x^3-4x^5}{(b^2-x^2)^2}$.

42. $y=\dfrac{a-x}{a+x}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$.

43. $s=\dfrac{t^3}{(1+t)^2}$; $\qquad \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3t^2+t^3}{(1+t)^3}$.

44. $f(s)=\dfrac{(s+4)^2}{s+3}$; $\qquad f'(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

45. $f(\theta)=\dfrac{\theta}{\sqrt{a-b\theta^2}}$; $\qquad f'(\theta)=\dfrac{a}{(a-b\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

46. $F(r)=\sqrt{\dfrac{1+r}{1-r}}$; $\qquad F'(r)=\dfrac{1}{(1-r)\sqrt{1-r^2}}$.

47. $\psi(y)=\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^m$; $\psi'(y)=\dfrac{my^{m-1}}{(1-y)^{m+1}}$.

Продиференціювати функції (48–97):

48. $y=\ln(x+a)$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+a}$.

49. $y=\ln(ax+b)$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{ax+b}$.

50. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1-x^2}$.

51. $y=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{1-x^4}$.

52. $y=e^{ax}$; $\dfrac{dy}{dx}=ae^{ax}$.

53. $y=e^{4x+5}$; $\dfrac{dy}{dx}=4e^{4x+5}$.

54. $y=\ln(x^2+x)$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$.

55. $y=\ln(x^3-2x+5)$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

56. $y=\log_a(2x+x^3)$; $\dfrac{dy}{dx}=\log_a e\dfrac{2+3x^2}{2x+x^3}$.

57. $y=x\ln x$; $\dfrac{dy}{dx}=\ln x+1$.

58. $f(x)=\ln(x^3)$; $f'(x)=\dfrac{3}{x}$.

59. $f(x)=\ln^3 x$; $f'(x)=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

60. $f(x)=\ln\dfrac{a+x}{a-x}$; $f'(x)=\dfrac{2a}{a^2-x^2}$.

61. $f(x)\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

62. $y=a^{e^x}$; $\dfrac{dy}{dx}=\ln a\cdot a^{e^x}e^x$.

63. $y=b^{x^2}$; $\dfrac{dy}{dx}=2x\cdot\ln b\cdot b^{x^2}$.

64. $y=7^{x^2+2x}$; $\dfrac{dy}{dx}=2\ln 7(x+1)7^{x^2+2x}$.

65. $y=c^{a^2-x^2}$; $\dfrac{dy}{dx}=-2xc^{a^2-x^2}\ln c$.

66. $r = a^{\theta}$; $\frac{dr}{d\theta} = a^{\theta} \ln a$.

67. $r = a^{\ln \theta}$; $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a^{\ln \theta} \ln a}{\theta}$.

68. $s = e^{b^2+t^2}$; $\frac{ds}{dt} = 2te^{b^2+t^2}$.

69. $u = ae^{\sqrt{v}}$; $\frac{du}{dv} = \frac{ae^{\sqrt{v}}}{2\sqrt{v}}$.

70. $p = e^{q \ln q}$; $\frac{dp}{dp} = e^{q \ln q}(1 + \ln q)$.

71. $\frac{d}{dx}[e^x(1-x^2)] = e^x(1-2x-x^2)$. **72.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

73. $\frac{d}{dx}(x^2e^{ax}) = xe^{ax}(ax+2)$.

74. $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+e^x}$.

75. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} = e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

76. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

77. $y = x^n a^x$; $\frac{dy}{dx} = a^x x^{n-1}(n + x \ln a)$.

78. $y = x^x$; $\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$.

79. $y = x^{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$.

80. $y = x^{\ln x}$; $\frac{dy}{dx} = \ln x^2 \cdot x^{\ln x - 1}$.

81. $f(y) = \ln y \cdot e^y$; $f'(y) = e^y\left(\ln y + \frac{1}{y}\right)$.

82. $f(s) = \frac{\ln s}{e^s}$; $f'(s) = \frac{1 - s\ln s}{se^s}$.

83. $f(x) = \ln(\ln x)$; $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

84. $F(x) = \ln^4(\ln x)$; $F'(x) = \frac{4\ln^3(\ln x)}{x \ln x}$.

85. $\phi(x) = \ln(\ln^4 x)$; $\qquad \phi'(x) = \dfrac{4}{x\ln x}$.

86. $\phi(y) = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$; $\qquad \phi'(y) = \dfrac{1}{1-y^3}$.

87. $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$; $\qquad f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

88. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 0$.

89. $y = e^{x^x}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{x^x(1+\ln x)x^x}$.

90. $y = \dfrac{c^x}{x^x}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{c}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{c}{x}-1\right)$.

91. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\dfrac{x}{n}\right)$.

92. $w = v^{e^v}$; $\qquad \dfrac{dw}{dv} = v^{e^v}e^v\left(\dfrac{1+v\ln v}{v}\right)$.

93. $z = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t$; $\qquad \dfrac{dz}{dt} = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t(\ln a - \ln t - 1)$.

94. $y = x^{x^n}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^{x^n+n-1}(n\ln x + 1)$.

95. $y = x^{x^x}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^{x^x}x^x\left(\ln x + \ln^2 x + \dfrac{1}{x}\right)$.

96. $y = a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy\ln a}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

97. $y = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots]$; $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy\ln a}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

98. Обчислити похідні.

1) $\dfrac{d}{dx}x^2\ln x$; 6) $\dfrac{d}{dx}e^x\ln x$; 11) $\dfrac{d}{dx}\ln(a^x+b^x)$;

2) $\dfrac{d}{dx}(e^{2x}-1)^4$; 7) $\dfrac{d}{dx}x^3 3^x$; 12) $\dfrac{d}{dx}\lg(x^2+5x)$;

3) $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{3x+1}{x+3}$; 8) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x\ln x}$; 13) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{2+x^2}{e^{3x}}$;

4) $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}$; 9) $\dfrac{d}{dx}\ln x^3\sqrt{1+x^2}$; 14) $\dfrac{d}{dx}(x^2+a^2)e^{x^2+a^2}$;

5) $\dfrac{d}{dx}x^{\sqrt{x}}$; 10) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$; 15) $\dfrac{d}{dx}(x^2+4x)^x$.

99. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$.

Вказівка. У цьому і наступних прикладах **(100–104)**, перш ніж диференціювати, потрібно прологарифмувати обидві частини рівності, якою задано функцію.

100. $y=\dfrac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-4)^{\frac{7}{3}}}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(x-1)^2(7x^2+30x-97)}{12(x-2)^{\frac{7}{4}}(x-3)^{\frac{10}{3}}}$.

101. $y=x\sqrt{1-x}(1+x)$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2+x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$.

102. $y=\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

103. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^3$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

104. $y=\dfrac{\sqrt{(x+a)^3}}{\sqrt{x-a}}$; $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x-2a)\sqrt{x+a}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$.

Продиференціювати функції (105–140).

105. $\arcsin\sqrt{1-4x^2}$; **106.** xe^{x^2}. **107.** $\ln\left(\sin\dfrac{v}{2}\right)$.

108. $\mathrm{tg}^2\dfrac{\theta}{3}+\ln\sec^2\dfrac{\theta}{3}$. **109.** $\ln\sin^2\dfrac{\theta}{2}$. **110.** $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$.

111. $e^{ax}\ln\sin ax$. **112.** $\left(\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$. **113.** $\sin^3\phi\cos\phi$.

114. $x^{\mathrm{tg}x}$. **115.** $\dfrac{a}{2\sqrt{\left(b-cx^n\right)^m}}$. **116.** $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

117. $\dfrac{m+x}{1+m^2}\cdot\dfrac{e^{m\,\mathrm{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}$. **118.** $e^{\sec(1-3x)}$. **119.** $\mathrm{tg}^2x-\ln\sec^2 x$.

120. $\mathrm{arctg}\sqrt{1-x^2}$. **121.** $\dfrac{3\ln\left(2\cos x+3\sin x\right)+2x}{13}$.

122. $\dfrac{z^2}{\cos z}$. **123.** $\mathrm{arcctg}\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

124. $e^{\mathrm{tg}x^2}$. **125.** $\left(\ln\mathrm{tg}3x-x^2\right)^3$.

127. $\dfrac{2-3t^{\frac{1}{2}}+4t^{\frac{1}{3}}+t^2}{t}$. **128.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2-x^2}}{\cos x}$. **129.** $\dfrac{(1+x)(1-2x)(2+x)}{(3+x)(2-3x)}$.

130. $e^x \ln \sin x$.

131. $\operatorname{arctg}(\ln 3x)$.

132. $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

133. $\sqrt[3]{\left(a-bx^n\right)^m}$.

134. $\operatorname{arctg} a^2$.

135. $\ln \sqrt{\left(a^2-bx^n\right)^m}$.

136. $\operatorname{ctg}^3 \ln(ax)$.

137. $\ln \sqrt{\dfrac{y^2+1}{y^2-1}}$.

138. $\left(1-3x^2\right)e^{\frac{1}{x}}$.

139. $\sqrt{\dfrac{(2-3x)^3}{1+4x}}$.

140. $\ln \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Обчислити за допомогою правила Лопіталя (141–174):

	Відповіді
141. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$	$\dfrac{8}{9}$.
142. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$;	$\dfrac{1}{n}$.
143. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$;	1.
144. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;	2.
145. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$;	2.
146. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi-2x)^2}$;	$-\dfrac{1}{8}$.
147. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$;	$\ln \dfrac{a}{b}$.
148. $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3-ar^2-a^2r+a^3}{r^2-a^2}$;	0.
149. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta-\arcsin\theta}{\sin^3\theta}$;	$-\dfrac{1}{6}$.
150. $\lim\limits_{x\to \phi} \dfrac{\sin x-\sin\phi}{x-\phi}$;	$\cos \varphi$.
151. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y \sin y-1}{\ln(1+y)}$;	2.
152. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}+\sec\theta-1}{\operatorname{tg}\theta-\sec\theta+1}$;	1.
153. $\lim\limits_{\phi\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2\phi-2\operatorname{tg}\phi}{1+\cos 4\phi}$;	$\dfrac{1}{2}$.

	Відповіді
154. $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{az-z^3}{a^4-2a^3z+2az^3-z^4}$;	$-\infty$.
155. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(e^x-e^2\right)^3}{(x-4)e^x+e^2x}$;	$6e^4$.
156. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x^{-2}}{x^2-1}$.	2.
157. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^5+32}$.	$\dfrac{3}{20}$.
158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.	2.
159. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.	$-\dfrac{1}{6}$.
160. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.	$-\dfrac{4}{\pi^2}$.
161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.	1.
162. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;	$\dfrac{1}{e}$.
163. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$;	1.
164. $\lim\limits_{0\to\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\mathrm{tg}\theta}$;	1.
165. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{y}\right)^y$;	e^a.
166. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;	e^2.
167. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$;	$\dfrac{1}{e}$.
168. $\lim\limits_{z\to 0}(1+nz)^{\frac{1}{z}}$;	e^n.
169. $\lim\limits_{\phi\to 1}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi\phi}{4}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi\phi}{2}}$;	$\dfrac{1}{e}$.
170. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos m\theta)^{\frac{n}{\theta^2}}$;	$e^{-\frac{1}{2}m^2n}$.
171. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{ctgx}}$;	e.

	Відповіді
172. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}$;	1.
173. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x\right)^{x}$;	1.
174. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;	$e^{\frac{2}{\pi}}$.

Знайти максимуми і мінімуми функцій (175–207):

	Відповіді
175. $3x^3-9x^2-27x+30$;	при x = –1 маємо max = 45; x = 3 – min = – 51.
176. $2x^3-21x^2+36x-20$;	x = 1 – max = – 3; x = 6 — min = – 128.
177. $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$;	x = 1 – max = $\frac{7}{3}$; x = 3 – min = – 1.
178. $2x^3-15x^2+36x+10$;	x = 2 – max = 38; x = 3 – min = 37.
179. $x^3-9x^2+15x-3$;	x = 1 – max = 4; x = 5 – min = – 28.
180. $x^3-3x^2+6x+10$;	функція не має ні max ні min. x = 1 — max = 2; x = 3 – min = – 26.
181. $x^5-5x^4+5x^3+1$;	x = 3 – min = –26; x = 0 ні max ні min.
182. $3x^5-125x^3+2160$;	при x = – 4 і x = 3 маємо x = –3 і x = 4 – min.
183. $(x-3)^2(x-2)$;	$x=\frac{7}{3}-\max=\frac{4}{27}$; x = 3 – min = 0.
184. $(x-1)^3(x-2)^2$;	x = 3 –min = 0; $x=\frac{8}{5}$–max;
185. $(x-4)^5(x+2)^4$;	x = – 2 –max; $x=\frac{2}{3}$ –min;
186. $(x-2)^5(2x+1)^4$;	при x = 4 функція не має ні max ні min. $x=-\frac{1}{2}$ –max; $x=\frac{11}{18}$ –min
187. $(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$;	при x = 2 функція не має ні max ні min. $x=\frac{1}{2}$ –max; $x=-1$ і $x=5$–min.
188. $(2x-a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{2}{3}},(a>0)$;	$x=\frac{2a}{3}$ –max; x = a –min
189. $x(a+x)^2(a-x)^3$, $(a>0)$;	x = – 1 функція не має ні max ні min. x = – a *і* $\frac{a}{3}$ –min; $x=-\frac{a}{2}$ – max; при x = a функція не має ні max ні min.

Відповіді

190. $b+c(x-a)^{\frac{2}{3}}, (a>0, c<0);$ при $x = a$ маємо max $= b$.

191. $a-b(x-c)^{\frac{1}{3}};$ функція не має ні max ні min.

192. $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10};$ $x = 4$ – max; $x = 16$ – min; при $x = 10$ функція не має ні max ні min;

193. $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}\ (a>0);$ $x=\dfrac{a}{4}$ –min;при $x = a$ і $x=\dfrac{a}{2}$ функція не має ні max ні min.

194. $\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};$ $x=\dfrac{1}{2}$ –min; при $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ функція не має ні max ні min.

195. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2};$ $x=\sqrt{2}$ –min; $x=-\sqrt{2}$ –max

196. $\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}(a>0, b>0);$ $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ –max; $x = 0$ –min.

197. $\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x};$ $x = 1$ –max = 10; $x=\dfrac{1}{2}$ –min = 8.

198. $\dfrac{1}{3x^5+20x^3+60x+1};$ Функція не має ні max ні min.

199. $\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x+17};$ $x = 2$ – min = – 3; $x = -3$ – max $\sqrt[3]{98}$.

200. $\dfrac{x}{\ln x};$ $x = e$ – min

201. $ae^{kx}+be^{-kx}(a>0, b>0, k>0);$ $x=\dfrac{\ln b-\ln a}{2k}$ –min = $2\sqrt{ab}$.

202. $x^x, (1\le x<+\infty);$ $x=\dfrac{1}{e}$ –min;

203. $x^{\frac{1}{x}}, (1\le x<+\infty);$ при $x = e$ маємо max.

204. $\cos x+\sin x (0\le x\le 2\pi);$ $x=\dfrac{\pi}{4}$ –max = $\sqrt{2}$. $x=\dfrac{5\pi}{4}$–min = $-\sqrt{2}$.

205. $\sin 2x-x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right);$ $x=\dfrac{\pi}{6}$ –max; $x=-\dfrac{\pi}{6}$ –min.

206. $x+\operatorname{tg}x.$ Функція не має ні max ні min.

207. $\sin x+\cos 2x\ \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right);$ $x=\arcsin\dfrac{1}{4}$–max; $x=\dfrac{\pi}{2}$–min. $x=\dfrac{\pi}{2}$–max.

208. Узявши до уваги опір повітря, закон відхилення маятника від вертикалі можна подати у вигляді:

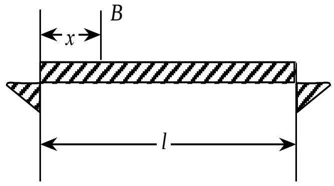
$$\theta = ae^{-kt}\cos(nt+\varepsilon)\ .$$

Показати, що найбільші елонгації відбуваються через рівні проміжки часу.

209. Потрібно якомога точніше виміряти деяку невідому величину x. Нехай для цього було викладено n однаково точних спостережень цієї величини, що дали результати: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.Похибки цих спостережень, напевне, такі: $x-a_1, x-a_2, x-a_3, ..., x-a_n$,причому як додатні так і від'ємні.Відомо, що найбільш імовірним значенням x є те, при якому сума квадратів похибок: $(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+...+(x-a_n)^2$ набуває найменшого значення. Показати, що найбільш імовірним значенням x буде середнє арифметичне результатів спостережень.

210. Згинальний момент у точці B рівномірно навантаженого бруска завдовжки l задається формулою:

$$M=\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2,$$



де w– навантаження на одиницю довжини цього бруска. Показати, що максимум згинального моменту досягається в центрі бруска.

211. Якщо повні витрати на кожну милю (1,596 км) для електричного провідника подаються залежністю

$$W=i^2t+\frac{t^2}{r}+b,$$

де i– сила струму; r– опір провідника; t і b величини, не залежні від i і r, то якого опору провідник є найвигіднішім з економічного погляду; мінімальним при даних i, t і b?

Відповідь $r=\frac{t}{i}$.

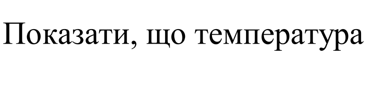
212. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x — відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до

$$x^2\ln\frac{1}{x}.$$

Показати, що найбільша швидкість досягається, коли

$$x=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

213. У точках A та B вміщено два джерела теплових потоків, потужності яких дорівнюють відповідно a та b. Повна потужність теплового потоку на відстані x від A задається формулою



$$I=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Показати, що температура в P буде найменша, якщо

$$\frac{d-x}{x}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}},.$$

тобто коли відстані *BP* і *AP* відносяться як кубічні корені з відповідних потужностей потоків. Відстань *P* від *A* подається у вигляді:

$$x = \frac{a^{\frac{1}{3}}d}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}.$$

214. Довести, що при будь-якому значенні *x*

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

215. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею 216 $м^2$, а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

Відповідь 12 і 18 м.

216. Дротом завдовжки 20 м потрібно обгородити клумбу, що має форму кругового сектора. Який слід узяти радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?

Відповідь. 5 м.

217. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку даної площі. Якщо частину вже зведеної кам'яної стіни взяти за одну зі сторін паркана, то якими мають бути розміри ділянки, щоб будівництво обійшлося найдешевше?

Відповідь. Сторона, паралельна стіні, має бути вдвоє довшою за кожну з двох інших сторін.

218. Резервуар, який повинен мати квадратне дно і бути відкритим зверху, потрібно обкласти всередині свинцем. Якими мають бути його виміри, щоб обкладання потребувало найменшої кількості свинцю, якщо він має вміщувати 32 л води?

Відповідь. Висота 2 м, сторона основи 4 м, тобто вдвічі більша за висоту.

219. Якщо внутрішня поверхня резервуара, заданого умовами попередньої задачі, дорівнює 48 $м^2$, то яка найбільша можлива його місткість?

Відповідь. 32 $м^2$.

220. Які найбільш економічно вигідні розміри циліндричного парового котла даної місткості?

Відповідь. Діаметр дорівнює довжині котла.

221. З куска картону 30×14 $см^2$ потрібно виготовити коробку (без кришки) найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутках, а потім зігнувши картон для утворення боків коробки.

Відповідь. Квадрати, що вирізаються, мають бути 3×3 см.

222. Вважаючи, що міцність бруска з прямокутним поперечним перерізом прямо пропорційна його ширині та кубу висоти, знайти ширину бруска найбільшої міцності, який можна вирізати з колоди діаметром 16 см.

Відповідь. Ширина дорівнює 8 *см.*

223. Із круглого залізного диска радіусом r потрібно зробити конус найбільшого об'єму. Який має бути радіус основи цього конуса?

Відповідь. $r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

224. Потрібно побудувати палатку у формі правильної чотирикутної піраміди. Знайти відношення висоти палатки до сторони основи, за якою при даній площині бічної поверхні об'єм палатки є найбільшим.

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

225. Дріт завдовжки 12 м розрізаний на шість частин, із яких дві одного розміру, чотири іншого. Перші два куски зігнули у вигляді квадратів, сполучивши їх вершини чотирма кусками, що залишилися. У результаті утворився прямокутний паралелепіпед. Як розрізали дріт, коли відомо, що об'єм цього паралелепіпеда найбільший з усіх можливих?

Відповідь. Чотири частини по 1 м, дві частини по 4 м.

226. Довжина і периметр поперечного перерізу поштової посилки у сумі мають становити 60 см. Знайти найбільший об'єм посилок: 1) якщо посилка має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним поперечним перерізом; 2) посилка має форму циліндра.

Відповідь. 1) 2000 см^3; 2) $\frac{8000}{\pi}$ см^3.

227. Щоб тертя рідини об стінки каналу було якомога меншим, площу його, що зрошується водою, потрібно зробити якнайменшою. Показати, що найраціональнішою формою відкритого прямокутного каналу із заданим периметром поперечного перерізу є така, при якій ширина каналу вдвічі перевищує його висоту.

228. Стіна, висота якої 27 м, на 8 м віддалена від будинку, який вищий за стіну. Знайти найменшу довжину драбини за такою умовою: вона має одним кінцем спиратися об землю із зовнішнього щодо будинку боку стіни, дотикатися до стіни у деякій проміжній точці останньої, а другим іншим кінцем торкатися будинку.

Відповідь. $13\sqrt{13}$.

229. Колода завдовжки 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють відповідно 2 м і 1 м. Із цієї колоди потрібно вирубати балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої має збігатися з віссю колоди, а об'єм бути найбільшим. Знайти розміри балки.

Відповідь. Довжина балки 13½ м; сторона основи поперечного перетину $1^1/_3$ м.

230. Електростанція розміщується на одному березі річки, ширина якої b кілометрів, а фабрика – на протилежному її березі на відстані a кілометрів, якщо лічити від проекції на той берег, де розташована станція. Знайти найбільш економний спосіб для підведення струму до фабрики, якщо вартість підвішування проводів над землею становить m грн., а прокладання кабелю під водою –n грн./ км.

Відповідь. $a - \dfrac{bm}{\sqrt{h^2 - m^2}}$ км по землі; $\dfrac{bn}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ км під водою.

231. Картину, висота якої 1,4 м, повішено на стіну так, що її нижній край на 1,8 м вищий від ока спостерігача. На якій відстані від стіни має стати спостерігач, щоб його положення було найсприятливішим для розглядання картини?

Відповідь. 2,4 м.

232. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ у точці (3, 2).

233. До параболи $y = x^2 - 3x + 1$ провести дотичні через точки: 1) (4, 1); 2) (4, 7). З'ясувати геометричний зміст здобутих результатів.

234. Показати, що нормаль до кривої $3y = 6x - 5x^3$, проведена в точці $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$, проходить через початок координат.

235. На кривій $y = f(x)$ знайти таку точку, щоб нормаль до кривої в цій точці проходила через початок координат. Здобутий результат застосувати до кривої $3y = 6x - 5x^3$, розглянутої в попередній задачі.

236. Показати, що промені, які падають на параболічне дзеркало з його фокуса, відбиваються паралельним пучком.

237. Накреслити (у достатньому масштабі) дугу кривої $y^5 - y + x = 0$, яка лежить у першому квадранті. Побудувати дотичні до цієї дуги в її кінцях.

238. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ у точці (1, 3).

239. Скласти рівняння нормалі до кривої $y^4 = ax^3$ у точці (a, a).

240. До еліпса $x^2 + 4y^2 = 400$ проведені дотичні в точках, абсциса кожної з яких дорівнює 15. Визначити кут між цими дотичними.

241. Показати, що рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ може бути написане у вигляді $\dfrac{Xx}{a^2} - \dfrac{Yy}{b^2} = 1$.

242. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої (параметрично) рівняннями $x = t^2$, $y = t^3$ («напівкубічна парабола»), у точці, для якої $t = 2$.

243. Дано криву $x = t^4 - 2t + 2$, $y = t^2 + 2t$. Скласти рівняння дотичної до неї в точці (1, 3).

244. Рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = a^2$ можна подати параметричними рівняннями $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $y = a\,\mathrm{tg}\,t$. Записати рівняння її дотичної в будь-якої точці.

245. Показати, що гіпербола $xy = 8$ і парабола $y = x^2$ перетинаються в точці (2, 4) під кутом, який дорівнює наближено 40°,5.

246. Знайти кути, які утворюються параболами $4y = 3x^2 + x - 6$ і $2y = -x^2 + 4x + 3$ в точках їх перетину. (Тут і далі нехтуємо уявними та нескінченно віддаленими точками зустрічі двох кривих.)

247. У параболі $4y = x^2$ проведено хорду, абсциси кінців якої дорівнюють відповідно 2 і 5. Які кути утворює ця хорда з параболою?

248. Під яким кутом синусоїда $y = \sin x$ перетинає пряму $2y = 1$?

249. Під яким кутом перетинаються криві $y = a^x$ і $y = b^x$ $(a \neq b)$?

250. Під якими кутами перетинаються параболи $y^2 = ax$ і $x^2 = by$? Розглянути частинний випадок, коли $a = b$.

Під якими кутами перетинаються криві в даній точці? (251–254).

251. $x = t^2 - 3t + 4$, $y = t^2 - 4t + 4 -$ у точці $x = 2$, $y = 1$?

252. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1 -$ у точці $x = 2$, $y = 1$?

253. $x = \cos t$, $y = \sin t -$ у точці $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

254. $x = 2\cos t$, $y = \sin t -$ у точці $x = 1$, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

255. Знайти точки кривої, $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1$, $y = t^2 + t + 1$, в яких дотична паралельна осі *Oy*.

256. Знайти точки кривої $x = t^2 + t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$, в якій дотична паралельна осі *Ox*.

257. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2$, $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2$ у точці $x = 0$, $y = 0$.

Дано функцію. Знайти її похідну вищого порядку (258–268).

258. $y = \left(3x^2 + 1\right)\left(\dfrac{1}{5}x^3 + x^2 - 3\right)\left(x - 1\right)^3$; $y^{(8)} - ?$

259. $y = \left(3x + 1\right)^2\left(2x^2 + 3\right)\left(x + 7\right)$; $y^{(6)} - ?$

260. $y = \left(3x + 1\right)^2\left(2x^2 + 3\right)\left(x + 7\right)^2$; $y^{(6)} - ?$

261. $y = \sqrt[5]{x^3}$; $y''' - ?$

262. $y = a^{3x}$; $y''' - ?$

263. $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$; $y''' - ?$

264. $y = x^2 e^{2x}$; $y^{(4)} - ?$

265. $y = x^2 e^{2x}$; $y^{(50)} - ?$

266. $y = \sin x \cos x$; $y^{(50)} - ?$

267. $y=\sin x\cos^2 x$; $y^{(4)}-?$

268. $y=e^x\sin x$; $y^{(4)}-?$

269. Довести, що функція $y=C\cos 2xC'\sin 2x$ задовольняє рівняння $y''+4y=0$.

270. Довести, що функція $y=Ce^{-x}+C'e^{-2x}$ задовольняє рівняння $y''+3y'+2y=0$.

271. Довести, що функція $y=e^{-x}\cos x$ задовольняє рівняння $y^{(4)}+4y=0$.

272. Довести, що коли $y=e^x\sin x$ і $z=e^x\cos x$, то $y''=2z$ і $z''=-2y$.

Знайти диференціал функцій (273–285).

	Відповіді
273. $y=ax^3-bx^2+cx+d$;	$dy=\left(3ax^2-2bx+c\right)dx$.
274. $y=2x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{2}{3}}+6x^{-1}+5$;	$dy=\left(5x^{\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-2}\right)dx$.
275. $y=\left(a^2-x^2\right)^5$;	$dy=-10x\left(a^2-x^2\right)^4dx$.
276. $y=\sqrt{1+x^2}$;	$dy=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.
277. $y=\dfrac{x^{2n}}{\left(1+x^2\right)^n}$;	$dy=\dfrac{2nx^{2n-1}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx.$
278. $y=\ln\sqrt{1-x^2}$;	$dy=\dfrac{xdx}{x^2-1}$.
279. $y=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$	$dy=2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx$.
280. $y=e^x\ln x$;	$dy=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)dx$.
281. $s=t-\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;	$ds=\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)dt$.
282. $\rho=\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi$;	$d\rho=\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$.
283. $r=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta+\operatorname{tg}\theta$;	$dr=\sec^4\theta\,d\theta$.
284. $f(x)=(\ln x)^3$;	$f'(x)dx=\dfrac{3(\ln x)^2dx}{x}$.
285. $\phi(t)=\dfrac{t^3}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;	$\phi'(t)dt=\dfrac{3t^2dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{5}{2}}}$;

Довести:

286. $d\left[\frac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)\right]=\frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

287. $d[\operatorname{arctg}\ln y]=\frac{dy}{y\left[1+(\ln y)^2\right]}$.

288. $d\left[\frac{\cos\phi}{2\sin^2\phi}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right]=-\frac{d\phi}{\sin^3\phi}$.

Знайти другий диференціал функцій:

289. 1) $x^2-y^2=a^2$; 2) $x^2=4ay$; 3) $y=e^x+e^{-x}$; 4) $xy=a$; 5) $y=\ln\sec x$; 6) $\rho=2a\operatorname{tg}\theta\sin\theta$; 7) $\rho=\sec^3\frac{\theta}{3}$; 8) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$; 9) $y^2=ax^3$; 10) $y=\ln x$; 11) $4k=y^3$; 12) $\rho=\sec^2\frac{\theta}{2}$; 13) $\rho=1+\sin\theta$; 14) $\rho\theta=a$.

290. Обчислити наближено приріст функції $y=x^3-5x+80$ при переході змінної x від значення $x=4$ до значення $x=4{,}001$. Порівняти наближений результат із точним.

Відповідь. $\Delta y\approx 0{,}008$. Точне значення відрізняється від наближеного шостим десятковим знаком.

291. Знаючи, що $\lg_{10}200=2{,}30103$, обчислити $\lg_{10}200{,}4$. Порівняти отриманий результат з даними таблиці.

292. Пояснити походження часто застосовуваної в техніці наближеної формули $\sqrt{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$,де $|b|$ є число мале порівняно з $|a|$.

293. Для функції $y=2x^3+6$ знайти значення *x*, якому відповідає *y*, що зростає у 24рази швидше за *x*.

Відповідь. $x=\pm 2$.

294. Ордината точки, яка описує криву $x^2+y^2=25$, спадає зі швидкістю 1,5 см/с. З якою швидкістю змінюється абсциса точки, коли ордината дорівнює 4 см?

Відповідь. $\frac{dx}{dt}=2$ см/с.

295. При якому значенні *x* функція $2x^2-4$ спадає в 5 раз швидше, ніж *x* зростає?

Відповідь. $x=-\frac{5}{4}$.

296. Знайти значення *x* у точках, де швидкість зміни функції $x^3-12x^2+45x-13$ дорівнює нулю.

Відповідь. $x = 3$ і 5.

297. Якому значенню x відповідають точки, де x^3-5x^2+17x і x^3-3x змінюються з однаковою швидкістю?

298. В якій точці еліпса $16x^2+9y^2=400$ ордината y спадає з такою самою швидкістю, як x зростає?

Відповідь. $\left(3,\ \dfrac{16}{3}\right)$.

299. Дано $y=x^3-6x^2+3x+5$. Знайти точки, в яких швидкість зміни ординати дорівнює швидкості зміни тангенса кута дотичної до кривої з віссю Ox.

Відповідь. $x = 1$ і 5.

Точка рухається по кривій, рівняння якої задано. Як змінюється дуга? (300–304)

	Відповіді
300. $y^2=2x;\ \dfrac{dx}{dt}=2;\ x=2$;	$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{5}$.
301. $xy=6;\ \dfrac{dy}{dt}=2;\ y=3$;	$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$.
302. $x^2+4y^2=20;\ \dfrac{dx}{dt}=-1;\ y=1$;	$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{2}$.
303. $y=x^3;\ \dfrac{dx}{dt}=3;\ x=-3$	
304. $y^2=x^3;\ \dfrac{dy}{dt}=4;\ y=8$	

305. Сторона рівностороннього трикутника завдовжки 24 см збільшується зі швидкістю 3 см/год. Обчислити приріст площини.

Відповідь. $36\sqrt{3}$ см^2/год.

306. Знайти швидкість зміни площі квадрата, якщо сторона b збільшується зі швидкістю a одиниць за секунду.

Відповідь. $2ab$ од^2. / с.

307. 1) Об'єм сферичної мильної бульбашки збільшується в кілька разів швидше за радіус. У скільки саме? 2) Якщо радіус бульбашки дорівнює 10смі збільшується зі швидкістю 1,25см/с, то який приріст об'єму?

Відповідь. 1) У $4\pi r^2$ разів швидше;
2) 500π см^2/с.

308. Драбина довжиною у 10модним кінцем притулена до вертикальної стіни, а другим спирається на горизонтальну підлогу. Нижній кінець відсувають від стіни зі швидкість 2 м/хв.

1) З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини, якщо основа її міститься на відстані 6*м* від стіни?

2)Коли обидва кінці драбини рухаються з однаковою швидкістю?

3) Коли верхній кінець драбини опускається зі швидкістю 1 м/хв?

Відповідь. 1) 1½ м/хв; 2) коли драбина розміщена на $5\sqrt{2}$ м від стіни; 3) коли драбина розміщена на $2\sqrt{5}$ м від стіни.

309. Баржу, палуба якої на 3 м нижча за рівень доку, тягнуть до нього канатом, прив'язаним до кільця у підлозі доку, причому канат рухають зі швидкістю 2 м/хв. за допомогою волока, який міститься на палубі. З якою швидкістю баржа наближається до доку, якщо віддалена від нього на 4 м?

Відповідь. 2,5 м/хв.

310. Вагон, який стоїть на верхньому шляху, міститься на висоті 10мпрямо над нижнім вагоном, причому їхні шляхи перетинаються під прямим кутом. Якщо швидкість верхнього вагона дорівнює 30км/год, а нижнього 18км/год, то з якою швидкістю води віддаляються один від одного через 4хв. після зустрічі?

Відповідь. 34,9 км/год.

311. Один корабель пливе в південному напрямі зі швидкістю 6 км/год., інший – у східному зі швидкістю 8 км/год. О 16.00 другий перетинає шлях першого в точці, в якій перший побував 2год. тому. Як змінювалася відстань між кораблями: а) о 15.00; б) о 17.00; в) коли відстань між ними не змінювалася?

Відповідь. а) Зменшувалася на 2,8 км/год; б) збільшувалася на 8,73км/год; в) о 15.28.

312. Нехай об'єм стовбура дерева пропорційний до куба його діаметра і останній рівномірно збільшується з року в рік зі зростанням дерева. Показати, що швидкість зростання об'єму стовбура, коли діаметр дорівнює 0,9м, у 25разів більша, ніж коли діаметр дорівнює 18 см.

313. Показати, що функція $f(x)=3x^2-4x+5$ зростає на проміжку $\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$ і спадає на проміжку $\left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right)$.

314. Показати, що функція e^x зростає на будь-якому проміжку.

315. Визначити проміжки зростання і спадання функції $y=1-x-x^2$. Результати проілюструвати за допомогою рисунка.

316. Показати, що функція $y=\frac{1}{12}x^3-x+3$ зростає на проміжках $(-\infty,-2)$ і $(2,+\infty)$і спадає на проміжку $(-2,\ 2)$. Результати проілюструвати за допомогою рисунка.

317. На яких проміжках зростають і на яких спадають функції$\sin x$;$\sin^2 x$;$\sin 3x$;якщо x змінюється від 0 до 2π?

318. Визначити проміжки зростання та спадання для кожної з функцій:

$$\frac{2x^3-15x^2+24x+1}{10};\qquad \frac{1}{3}x^3-x^2+x+2;;\qquad -x^3+x^2-x+1$$

і проілюструвати результати графічно.

319. Показати, що функція $f\left(x\right)=-\dfrac{6}{x^3+1}$ зростає на будь-якому проміжку $\left(\alpha,\ \beta\right)$, який не містить значення $x=-1$.

320. Дослідити на зростання та спадання функцію a^x $\left(a>0\right)$.

321. Дослідити на зростання та спадання функцію $1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}$. Скористатися здобутим результатом для доведення твердження: $1-\cos x<\dfrac{x^2}{2}$.

322. Скористатися нерівністю попередньої задачі для доведення того, що при $x>0$ справджується нерівність:

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$

323. Визначити напрямок угнутості ланцюгової лінії $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, де $a>0$.

324. Для кривої $y=(x-2)(x-4)(x-5)$ дослідити напрям угнутості і скористатися здобутими результатами при побудові графіка.

325. Для кривої $12y=x^4-6x^3+25x+24$ дослідити напрямок угнутості.

326. Показати, що крива $y=\dfrac{1}{3}x^4+x^2-3x-1$ не має точок перегину.

327. Показати, що крива $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

328. Знайти точки перегину «кривої ймовірності» $y=e^{-x^2}$.

329. Показати, що крива $12x^3y-12\ln x+5=0$ має точку перегину при $x=e$.

330. Знайти точки перегину кривих:

1) $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^3}$; 2) $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.

331. Визначити напрям угнутості циклоїди

$$x=a(t-\sin t); \qquad y=a(1-\cos t)$$

в точках, що не лежать на осі абсцис.

332. Визначити напрям угнутості і точки перегину для «вкороченої циклоїди»:

$$x=a(t-\mu\sin t),\quad y=a(1-\mu\cos t),\qquad \text{де } 0<\mu<1.$$

333. Визначити напрям угнутості кривої $y=x^5-5x^3-15x^2+30$.

334. Показати, що точка (2, 1) є для кривої $6y=x^3-6x^2+12x-2$ точкою перегину.

335. Для кривої $y=2-\dfrac{1}{3}x^2$ дослідити напрям угнутості.

336. Показати, що синусоїда $y = \sin x$ звернена угнутістю вниз у точках, що лежать вище від осі абсцис, і вгору – у точках, що лежать нижче від цієї осі. Знайти точки перегину синусоїди.

Довести нерівності (337–341).

337. $(y-x)\cos y < \sin y - \sin x < (y-x)\cos x,$ якщо $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$.

338. $\dfrac{y-x}{\cos^2 x} < \mathrm{tg}y - \mathrm{tg}x < \dfrac{y-x}{\cos^2 y}$, якщо $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$.

339. $(y-x)a^x \log a < a^y - a^x < (y-x)a^y \log a$, якщо $y > x$.

340. $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \mathrm{arctg}y - \mathrm{arctg}x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$, якщо $y > x$.

341. $\dfrac{y-x}{y} < \log y - \log x < \dfrac{x-y}{x}$, якщо $y > x > 0$.

342. Що можна сказати про корені похідної функції $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,не знаходячи цієї похідної?

343. Що можна сказати про корені похідної функції $y = (x-1)^2(x+1)^3$,не знаходячи цієї похідної?

344. Що можна сказати про корені похідної функції $y = \sin x \cdot e^x$, не знаходячи цієї похідної?

345. Довести, що $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ при $x > 0$ і $-\dfrac{\pi}{2}$ при $x < 0$.

346. Довести рівність $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi$, де $\varepsilon = 0$, якщо $xy < 1$; $\varepsilon = -1$, якщо $xy > 1$ і $x < 0$; $\varepsilon = +1$, якщо $xy > 1$ і $x > 0$.

347. Довести рівність $\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$, де $\eta = -1$, $\varepsilon = 0$, якщо $xy < 0$ або $x^2 + y^2 \le 1$; $\eta = -1$, $\varepsilon = -1$, якщо $x^2 + y^2 > 1$ і $x < 0$, $y < 0$; $\eta = -1$, $\varepsilon = +1$, якщо $x^2 + y^2 > 1$ і $x > 0$, $y > 0$.

348. Довести, що сума $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$, якщо $-1 < x < \infty$,і дорівнює $-\dfrac{3\pi}{4}$, якщо $-\infty < x < -1$.

349. Перевірити рівність $\dfrac{\pi}{4} = 4\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5} - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{239}$.

350. Перевірити рівність $2\mathrm{arctg}10 + \arcsin\dfrac{20}{101} = \pi$.

351. Перевірити рівність $2\mathrm{arctgx} + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x > 1$.

352. Перевірити рівність $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$ при $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Дослідити функції і побудувати їх графіки (353–365).

353. $y = \arcsin(\sin x)$.

354. $y = \arccos(\cos x)$.

355. $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x)$.

356. $y = \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)$, де x не дорівнює цілому числу, і $y = x$, де x– ціле число, при $0 \le x < \infty$.

357. а) $y = \frac{1}{x+2}$; б) $y = \frac{x+1}{x}$; в) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$; г) $y = \frac{3-2x}{1-x}$.

358. а) $y = \frac{3x-2}{x-1}$; б) $y = \frac{2+3x}{1-x}$; в) $y = \frac{2-3x}{1+x}$.

359. а) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$; б) $y = \sqrt{9-x^2}$; в) $y = \sqrt{4x-x^2+5}$.

360. а) $y = \sqrt{x^2-1}$; б) $y = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$; в) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$.

361. а) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$; б) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; в) $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$.

362. а) $y = \frac{1}{x^2+2x-8}$; б) $y = \frac{1}{4x-x^2+5}$; в) $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$.

363. а) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; б) $y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}$; в) $y = \log_3 \frac{1}{x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$.

364. а) $y = \log_2 \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x$; в) $= \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x$.

365. а) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$, б) $y = \log_2^2 x$; в) $\log_{3-x}(x^2-1)$.