

8.1. Алгебраїчні функції.

Властивості степенів.

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1; & (ab)^x &= a^x b^x; \\ a^x \cdot a^y &= a^{x+y}; & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}; \\ a^x : a^y &= a^{x-y}; & a^{-x} &= \frac{1}{a^x}; \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

Многочлени.

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \\ ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2), \end{aligned}$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для $n \in \mathbb{N}$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Властивості арифметичних коренів.

Для будь-яких натуральних n, k , більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \quad \text{якщо } 0 \leq a < b;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

8.2. Тригонометричні функції.

(У всіх формулах, наведених у цьому пункті, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частини формул)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргумента.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формули додавання.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y};$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x};$$

Формули подвійного аргумента.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Формули половинного аргумента.

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2};$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

Формули гнізнення степеня.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Формули перетворення суми в добуток.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right);$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}.$$

Формули перетворення добутку в суму.

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута.

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}};$$

$$tgx = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 - tg^2 \frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}};$$

$$ctgx = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{2tg \frac{x}{2}}.$$

Формули зведення.

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
\sin	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
\cos	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$-tg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$
ctg	$-ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$

Значення тригонометричних функцій.

Значення кута		Функції			
град	рад	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0	π	0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2π	0	1	0	∞

Властивості обернених тригонометричних функцій.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1$$

$$\arctg(-a) = -\arctg a, a \in \mathbf{R}$$

$$\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg} a, a \in \mathbf{R}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in \mathbf{R}$$

Розв'язки найпростіших тригонометричних функцій.

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь.

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\sin x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

8.3. Властивості логарифмів.

1⁰. Основна логарифмічна тотожність:

$$x = a^{\log_a x}, x > 0, a > 0, a \neq 1.$$

2⁰. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

3⁰. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

4⁰. Формула для логарифма добутку:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0.$$

5⁰. Формула для логарифма частки:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0.$$

6⁰. Формула для логарифма степеня:

$$\log_a x^p = p \log_a x, x > 0, p \in \mathbf{R}.$$

7⁰. Формула переходу до нової основи логарифма:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, x > 0, b \in \mathbf{R}, b > 0, b \neq 1.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

8.4. Прогресії.

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n+1} + d, n \geq 2$ де d - різниця прогресії	$b_n = b_{n-1}q, n \geq 2$ де d - знаменник прогресії
Формула n - го члена	
$a_n = a_1 + (n - 1)d$ $n = 1, 2, \dots$	$b_n = b_1 q^{n-1}$ $n = 1, 2, \dots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1}, n \geq 2$	$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}, n \geq 2$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q}, q < 1$

8.5. Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона.

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n = n!, 0! = 1.$$

Число розміщень з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1) \dots (n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

або

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - число комбінацій з n елементів по m елементів; $n \in \mathbf{N}$.

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$.

8.6. Числові значення деяких величин.

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$\frac{1}{e}$	0,36788
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	e^2	7,38906
$\frac{\pi}{3}$	1,04720	\sqrt{e}	1,64872
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$lg e$	0,43429
$\frac{\pi}{6}$	0,52360	$ln 10$	2,30258
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	1 радіан	$57^{\circ}17'45''$
π^2	9,86960	1° (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205