НаціональнийуніверситетцивільногозахистуУкраїни

С.В. Говаленков, О.А. Тарасенко

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 2.

Харків 2024

УДК 517(07)

Друкується за рішенням
Вченої ради факультету техногенно-екологічної безпеки НУЦЗ України
Протокол від 24.06.2024р. № 10

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент В.Ю. Колосков, завідувач кафедри прикладної механіки та технологій захисту навколишнього середовища.

Говаленков С.В., Тарасенко О.А.
Практикум з вищої математики. Частина 2. / С.В. Говаленков, О.А. Тарасенко.– Х.: НУЦЗУ, 2024. - 68с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика» з тем: «Функція комплексної змінної», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Дослідження функції однієї змінної». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв’язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи. Призначені для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня ”бакалавр” за у галузях знань 26 «Цивільна безпека» та 10 «Природничі науки».

Друкується за авторською редакцією.
Відповідальний за випуск С.В. Говаленков.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дуже важливою формою навчання курсантів та студентів є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичного матеріалу за підручником і конспектом, розгляду та самостійного розв’язання задач, причому опанування теоретичних знань є необхідною передумовою формування практичних навичок і умінь, але не завжди є цілком достатнім для цього. Вміння розв’язувати задачі формується виключно шляхом цілеспрямованої та копіткої самостійної роботи, в першу чергу пов’язаної з аналізом прикладів розв’язання задач, які наведені у підручниках та навчальних посібниках.

При самостійному розв’язанні задач часто виникають певні труднощі, які пов’язані або з вибором методу розв’язування задачі, або з суто технічними особливостями обраного методу. Вибір методу розв’язування вимагає глибокого аналізу прикладів з метою встановлення закономірностей, яким підкоряється цей вибір. Для вирішення другої складової треба систематично працювати, виконуючи всі завдання викладача, в тому числі й ті, які здаються дуже простими.

Основне мета цього навчального посібника – допомогти слухачам подолати певні складності при вивченні навчального матеріалу та навчити їх свідомо застосовувати теоретичні знання до розв’язування задач.

Дисципліна “Вища математика” є однією з фундаментальних дисциплін, яка формує науковий і методичний апарат, необхідний для вивчення інших фундаментальних дисциплін. Курс “Вищої математики” є частиною циклу природничо-наукової підготовки і спрямований на розвиток загальної математичної культури, формування діалектико-матеріалістичного світогляду, надає уявлення про методи і задачі, що розглядаються. Вивчення дисципліни передбачає систематичне і послідовне відображення загальних математичних положень і методів щодо вирішення задач фундаментальних і прикладних дисциплін.

Вивчення дисципліни “Вища математика” базується на засадах теоретичних і практичних знань і вмінь, отриманих курсантами та студентами в загальноосвітніх навчальних закладах, і вона є фундаментальною дисципліною, на якій базуються практично всі інженерні та технічні дисципліни.

У навчальному посібнику викладено матеріал з 3 тем (теми 4-6). Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв’язанням необхідної кількості задач різного рівня складності. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи, до яких наведені відповіді.

Автори сподіваються, що така побудова посібника надає слухачеві необхідні можливості для активної самостійної роботи, що сприятиме засвоєнню учбового матеріалу при вивченні дисципліни «Вища математика».

ЛІТЕРАТУРА ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Основна:

1. О.Є. Басманов, І.К. Кириченко, Л.В. Мігунова, О.П. Сознік. Вища математика. Х.: АПБУ, 2003.

2. Мунтян В.К., Говаленков С.В. Вища математика: методичні рекомендації з організації самостійної роботи при вивченні дисципліни.−Х.: НУЦЗУ, 2015. - 213с.

3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах у 4 ч. Х.: ХНУРЕ, 2002.

Додаткова:

4. Давидов М.О. Математичний аналіз: у 3 ч., К.: ВШ, 1990.

5. Шкіль М.І. Математичний аналіз: у 2 ч., К.: ВШ, 1978.

6. . для вузів. К.: ВШ, 1994.

ТЕМА: ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.

1.1 ДІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Вперше комплексні числа зустрічаються в праці італійського математика Д. Кардано (1501-1576) "Велике мистецтво або про алгебраїчні правила", яка в основному присвячена викладу загальних способів розв'язування рівнянь 3-го та 4-го степенів. Кардано розв'язував задачу, яка зводиться до розв'язування квадратного рівняння (в сучасних позначеннях):

$$x^2 - 10x + 40 = 0 .$$

Згадка про комплексні числа є також у "Геометрії" французького математика Р. Декарта (1596-1650), але він не вважав їх справжніми й тому назвав "уявними". Ця назва закріпилася за ними назавжди.

У 1794 році була надрукована книга видатного математика Л. Ейлера (1707-1783), в якій вперше замість $\sqrt{-1}$ вживається загальноприйняте зараз позначення i. До цього часу буква i вживалася в математиці для позначення нескінченності (тепер ми пишемо ∞), та для позначення приросту аргументу (тепер вживаються позначення Δx, Δy, тощо). Ейлеру належить також пропозиція записувати комплексні числа $a + b\sqrt{-1}$ у вигляді $a + bi$. Після того, як німецький математик К. Гаусс (1777-1855) у 1831 році почав широко вживати такий запис, він став загальноприйнятим. Гауссу належить також термін "комплексне число".

Таким чином, якщо поняття натурального числа формувалося безпосередньо на базі уявлень, набутих у результаті сприймання реального світу, то поняття комплексного числа виникло на основі раніше сформованих понять за допомогою раніше створених теорій. Комплексні числа, з'явившись спочатку в самій математиці як корені рівнянь виду $x^2 + a = 0$ (де $a > 0$), після набуття ними геометричного тлумачення (датський землемір Г. Вессель (1745-1818)), почали широко застосовуватись у різних галузях математики.

Історично комплексні числа з'явилися у зв'язку з розв'язуванням квадратних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Найпростіше з них, яке не має коренів серед дійсних чисел, це:

$$x^2 + 1 = 0 . \qquad (1.1)$$

Таким чином, виникла проблема розширення системи дійсних чисел до такої системи чисел, в якій рівняння (3.1) мало б корінь.

Операції з комплексними числами мають усі основні властивості, які притаманні операціям системи дійсних чисел:

1. *комутативність суми*: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

2.*асоціативність суми*:

$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)$;

3.*комутативність добутку*: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)(x_1, y_1)$;

4.*асоціативність добутку*:

$((x_1, y_1)(x_2, y_2))(x_3, y_3) = (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3)) = (x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$;

5.*дистрибутивність*: $((x_1, y_1) + (x_2, y_2))(x_3, y_3) = (x_1, y_1)(x_3, y_3) + (x_2, y_2)(x_3, y_3)$;

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$

є число: $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Нулем у системі комплексних чисел є початок координат: $0 = (0, 0)$.

Протилежним комплексним числом стосовно даного $z = (x, y)$ є:

$-z = -(x, y) = (-x, -y)$.

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$ є комплексне число: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$.

Є поняття *оберненого* комплексного числа. Якщо в останньому виразі покласти $z_1 = 1 = (1, 0)$ (за умови, що $z_2 \neq 0$), то $\mathrm{z}_2^{-1} = \dfrac{1}{(x_2, y_2)} = \left(\dfrac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \dfrac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$.

Означивши основні операції в системі комплексних чисел, а також основні властивості та всі інші операціїі поняття, які є наслідками цих формул, можна легко прийти до висновку, що система комплексних чисел є розширенням системи дійсних чисел.

Окремим випадком цієї рівності є нуль $(0, 0)$і одиниця $(1, 0)$ в системі комплексних чисел, які є звичайними 0 і 1 в системі дійсних чисел.

Покажемо тепер, що серед комплексних чисел перебуває корінь рівняння $x^2 + 1 = 0$, тобто таке число, квадрат якого дорівнює дійсному числу -1. Візьмемо точку $(0,1)$, тобто точку, яка лежить на осі ординат на відстані 1 вгору від початку координат.

Дійсно, користуючись правилом множення, одержимо:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1.$$

Ця точка позначається в математиці літерою i: $(0,1)=i$, отже $i^2=-1$.

Звідки знаходимо $i=\sqrt{-1}$. Комплексне число i називається *уявною одиницею.* Комплексні числа, які дорівнюють добутку дійсного числа на i, наприклад, $2i$, $3i$ тощо, називаються чисто уявними числами.

Слід відзначити, що позначення уявної одиниці латинською літерою i, тобто $i\equiv\sqrt{-1}$, запроваджене Л. Ейлером (1707-1783) у 1777 році, завдяки широкому вживанню його в наукових працях видатного німецького вченого К. Гаусса (1777-1855) з початку XIX століття є загальноприйнятим у математиці. Однак інколи, наприклад, в електротехніці, де літера i використовується для позначення фундаментальної величини даного розділу науки, а саме – сили електричного струму, для позначення уявної одиниці вживається латинська літера j, тобто $j\equiv\sqrt{-1}$.

Запроваджений нами запис комплексного числа $z=(x,y)$ може набувати іншої форми. Дійсно, знайдемо спочатку добуток дійсного числа y на число i. Дійсне число y це $(y,0)$, а i це $(0,1)$. Тоді маємо: $y\cdot i=(y,0)\cdot(0,1)=(0,y)$.

Ця точка знаходиться на осі ординат і має ординату y (можна сказати в уявних одиницях). Тоді, довільна точка (x,y) може бути записана: $(x,y)=(x,0)+(0,y)$, то одержимо: $(x,y)=x+i\,y$.

Цей запис комплексних чисел відомий усім ще з середньої школи і називається ***алгебраїчною формою комплексного числа***. При цьому x та y – дійсні числа; x називається ***дійсною частиною комплексного числа*** z і позначається так: $x=\operatorname{Re} z$, а оскільки y є коефіцієнтом при уявній одиниці, то y називається ***уявною частиною комплексного числа*** z і позначається так: $y=\operatorname{Im} z$. Таким чином:

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \,. \qquad (1.2)$$

Насамкінець необхідно зазначити, що за умови збереження запровадженої нами аксіоматики операцій додавання та добутку, побудова комплексних чисел на площині, тобто у двовимірному просторі x та y, не переноситься на жодний із випадків більш вимірного простору. Принципово неможливо побудувати аналогічну систему чисел у тривимірному просторі. Якщо ж відмовитися від комутативності множення, то така побудова стає можливою в чотиривимірному просторі. Ця система називається *системою кватерніонів.* Якщо ж далі відмовитися від асоціативності добутку, то з'являється можливість побудувати аналогічну систему у восьмивимірному просторі. Вона називається *системою чисел Келі.*

1.2 АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Форма запису комплексного числа: $z = x + iy$, називається *алгебраїчною,* де, як уже було сказано вище, $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, а $y = \operatorname{Im} z$ –уявна частина комплексного числа, $i = \operatorname{Im} 1$– уявна одиниця. Інколи з метою конкретизування (тобто фіксованості) комплексного числа в алгебраїчній формі його записують ще й так: $z = a + ib$,

Перелічимо операції над комплексними числами, записаними в алгебраїчній формі.

1.**Рівність** комплексних чисел. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними, тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні й уявні частини:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \,, \\ y_1 = y_2 \,. \end{cases}$$

Слід зауважити, що поняття більше або менше для комплексних чисел не існує.

2.**Алгебраїчною сумою** двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число:

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

Таким чином, можна сказати, що при додаванні або відніманні комплексних чисел додаються або віднімаються окремо їхні дійсні частини й окремо їхні уявні частини.

3.**Добутком** двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

Приклади.

1. При яких значеннях x та y виконується рівність

$$x(2-i) + y(2i-1) = 4-5i\ .$$

Звідки маємо:

$$(2x-y) + i(-x+2y) = 4-5i\ ,$$

$$2x - y = 4, \quad -x + 2y = -5\ .$$

Звідки $x = 1$, $y = -2$.

2. Знайти суму та добуток комплексних чисел $z_1 = 2-7i$ та $z_2 = 3+5i$.

Знаходимо: $z_1 + z_2 = (2-7i) + (3+5i) = (2+3) + i(-7+5) = 5-2i$,

$$z_1 \cdot z_2 = (2-7i)\cdot(3+5i) = (2\cdot 3 - (-7)\cdot 5) + i(2\cdot 5 + (-7)\cdot 3) = 41 - 11i\ .$$

Формули для суми, різниці та добутку комплексних чисел можна одержати автоматично, якщо формально виконати відповідні дії над двочленами $x_1 + iy_1$ та $x_2 + iy_2$ із заміною при цьому i^2 на -1.

Піднесення комплексного числа до степеня утворюється за формулами піднесення до степеня двочлена за умови, що:

$i^1 = i$, $\quad i^2 = -1$, $\quad i^3 = -i$, $\quad i^4 = 1$.

Ці формули можна легко узагальнити на випадок цілих додатних показників степеня:

$$
\left.\begin{array}{lllllll}
i^5 & = & i^{4+1} & = & i^4 \cdot i & = & i \\
i^6 & = & i^{4+2} & = & i^{41} \cdot i^2 & = & -1 \\
i^7 & = & i^{4+3} & = & i^4 \cdot i^3 & = & -i \\
i^8 & = & i^{4+4} & = & i^4 \cdot i^4 & = & 1
\end{array}\right.
\Rightarrow
\begin{array}{lllll}
i^{4n} & & & = & 1 \\
i^{4n+1} & = & i^1 & = & i \\
i^{4n+2} & = & i^2 & = & -1 \\
i^{4n+3} & = & i^3 & = & -i
\end{array};
$$

Приклади.

Виконати додавання і віднімання комплексних чисел:

а) $(2+i)+(3+i)+(-4+5i)=1+7i$:

б) $(5+3i)-(2+i)=3+2i$;

в) $(0{,}8-0{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)-(1{,}5+0{,}7i)-(2{,}3-0{,}6i)=-2{,}9-1{,}6i$;

г) $8+(2-9i)+4i+(-2-8i)=8-13i$;

д) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}i\right)=\frac{7}{12}-\frac{9}{20}i$.

Виконати множення і ділення комплексних чисел:

а) $(3+7i)(2+i)=6+3i+14i-7=-1+17i$;

б) $(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$;

в) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)=\sqrt{6}+2i-\sqrt{3}i-\sqrt{2}i^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})i$;

г) $\frac{3+4i}{5-2i}=\frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{15+6i+20i+8i^2}{25-4i^2}=\frac{7}{29}+\frac{26}{29}i$;

д) $\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-10i}{1-4i^2}=\frac{5-10i}{5}=1-2i$.

Виконати дії z_1+2z_2; $z_1+\bar{z}_2$, якщо $z_1=2+i$; $z_2=5-4i$.

$z_1+2z_2=(2+i)+2(5-4i)=12-7i$.

$z_1+\bar{z}_2=[\bar{z}_2=5+4i]=(2+i)+(5+4i)=7+5i$.

Піднести до степеня:

а) $(3+2i)^2=9+12i+4i^2=5+12i$;

б) $(1+i)^4=\left((1+i)^2\right)^2=\left(1+2i+i^2\right)^2=(2i)^2=-4$;

в) $(2+5i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 5i + 3\cdot 2\cdot (5i)^2 + (5i)^3 = 8 + 60i + 150i^2 + 125i^3 = -142 - 125i$.

г) $(1-i)^{12} = \left((1-i)^2\right)^6 = (-2i)^6 = -64$.

1.3 СПРЯЖЕНІ ЧИСЛА

Нехай є комплексне число $z = x + iy$. Число $x - iy$, яке відрізняється від комплексного числа z тільки знаком уявної частини, називається *спряженим* відносно z і позначається z^*. Наприклад, комплексні числа $z = a + ib$ і $z^* = a - ib$ є спряженими відносно одне одного. Зі шкільного курсу математики відома формула в системі дійсних чисел:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Неважко переконатися, що аналогом до неї в системі комплексних чисел буде: $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$, де права частина є добуток двох взаємно спряжених чисел.

Розглянемо **основні властивості** спряжених чисел.

1. *Комплексне число спряжене до спряженого є дане комплексне число*: $(z^*)^* = z$.

2. *Сума двох взаємноспряжених чисел є дійсне число,* а *їх різниця* $-$ *чисто уявне число*: $z + z^* = 2\operatorname{Re} z$, $\quad z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$.

3. *Спряжене комплексне число, яке складається з алгебраїчної суми двох інших комплексних чисел,дорівнює алгебраїчній сумі спряжених доданків*: $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

4. *Спряжене комплексне число, яке є добутком двох інших комплексних чисел, дорівнює добутку спряжених співмножників*: $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$.

Запровадження спряжених чисел дає можливість доповнити дії комплексних чисел в алгебраїчній формі діленням. Дійсно, якщо є два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$, то:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1).$$

Одержимо: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$.

Тобто ділення двох комплексних чисел замінюється множенням знаменника на спряжене число.

Підсумовуючи властивості спряжених чисел, можна твердити: якщо будь-яке комплексне число z деяким чином виражається через інші комплексні числа z_1, z_2, …, z_n за допомогою операцій додавання, віднімання, множення та ділення, то, змінюючи в цьому разі всі числа z_1, z_2, …, z_n на спряжені, ми одержимо число спряжене з z .

Звідси випливає, що будь-яка рівність між комплексними виразами буде залишатися правильною, якщо в цій рівності всюди покласти $-i$ замість i, оскільки при цьому ми перейдемо від рівності комплексних чисел до рівності спряжених комплексних чисел. Тому числа $-i$ та i алгебраїчно не відрізняються. Зокрема, хибним є уявлення, що $i = \sqrt{-1}$, а $-i = -\sqrt{-1}$. Насправді ж $\sqrt{-1}$ має два значення: $\pm i$. Ось чому абсолютно правильним є зауваження деяких авторів підручників відносно означення уявної одиниці i не як $\sqrt{-1}$, а як $i^2 = -1$.

Приклади.

1. Дано $z_1 = 10 + 5i$ та $z_2 = 3 - 4i$.

Обчислити z_1/z_2.

Домножуючи знаменник і чисельник дробу на спряжене число відносно знаменника, маємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(10 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{30 + 15i + 40i + 20i^2}{9 + 16} = \frac{10 + 55i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

2. Знайти комплексне число $z = \dfrac{12 + 5i}{(2 + 3i)^2}$.

Маємо:

$$z=\frac{12+5i}{(2+3i)^2}=\frac{12+5i}{4+12i+9i^2}=\frac{12+5i}{-5+12i}=\frac{(12+5i)(-5-12i)}{(-5+12i)(-5-12i)}=$$
$$=-\frac{(12+5i)(5+12i)}{25+144}=-\frac{60+144i+25i+60i^2}{169}=-\frac{169i}{169}=-i.$$

3. Виконати дії:

$$\frac{2+i}{2-i}+(6+3i)(2+3i).$$

Маємо:

$$\frac{2+i}{2-i}+(6+3i)(2+3i)=\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+(6+3i)(2+3i)=$$

$$=\frac{4+4i+i^2}{4+1}+12+6i+6i+3i^2=\frac{3+4i}{5}+9+12i=\frac{48}{5}+\frac{64}{5}i.$$

4. Дано $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$.

Знайти $\operatorname{Re} z$ та $\operatorname{Im} z$.

Маємо:

$$z=\frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+3i+2i+i^2\sqrt{3}}{4+3}=\frac{\sqrt{3}+5i}{7},$$

звідки знаходимо: $\operatorname{Re} z=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$; $\quad \operatorname{Im} z=\dfrac{5}{7}$.

5. Дано $\dfrac{2i+1}{3-i}+i^3$. Знайти спряжене число.

$$z=\frac{2i+1}{3-i}+i^3=\frac{2i+1}{3-i}-i=\frac{-i}{3-i}=\frac{-i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{1-3i}{4}=\frac{1}{4}-i\frac{3}{4}$$

Відповідь: $\bar{z}=\dfrac{1}{4}+i\dfrac{3}{4}$

1.4 ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Оскільки комплексне число зображується точкою площини $M(x,y)$, то комплексні числа, а також всі операції над ними, мають геометричну інтерпретацію. Площина, точки якої ототожнюються з комплексними числами, умовно називається *комплексною площиною.* Вісь абсцис цієї площини називається *дійсною віссю*, оскільки її точки зображають дійсні числа; відповідно вісь ординат комплексної площини називається *уявною* віссю. Якщо точку $M(x, y)$, що є прототипом числа $z = x + iy$, з'єднати з початком координат, то одержаний відрізок OM (рис. 1) називається *вектором комплексної площини*, який має початок у точці $O(0,0)$ і кінець у точці $M(x, y)$. Відстань OM називається *модулем комплексного числа* z і позначається $|z|$ або $|x + iy|$. З прямокутного трикутника KOM випливає, що $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

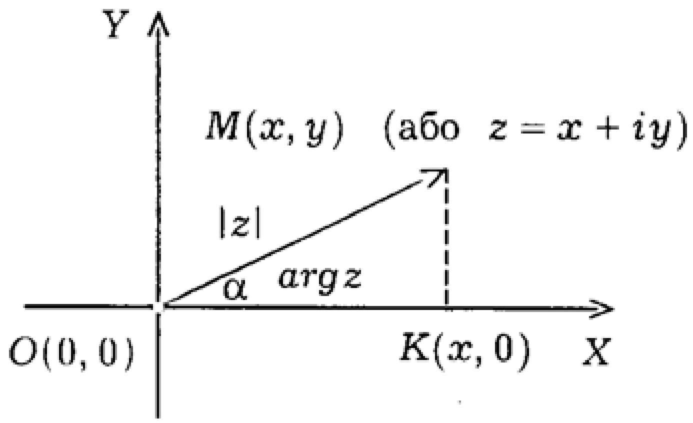


Рис.1

Величина кута між додатним напрямком дійсної осі OX і вектором комплексної площини, що відповідає цьому числу, називається *аргументом комплексного числа* z і позначається $\arg z$ або $\arg(x + iy)$. Кут $\arg z$ може набувати будь-яких дійсних значень, як додатних, так і від'ємних, причому додатними кутами вважаються ті, які відраховуються проти руху годинникової стрілки. З рис. 1 видно, що коли кути відрізняються один від одного на $\pm 2\pi$ або на число, кратне 2π, то відповідні їм точки площини збігаються. Тобто аргумент комплексного числа на відміну від його модуля визначається неоднозначно.

Множина всіх кутів вектора комплексного числа z позначається $\mathrm{Arg}z$. Величина кута, який знаходиться в інтервалі від -180^o до 180^o, називається головним значенням аргументу комплексного числа Z, тобто:

$$-180^o < \arg z \le 180^o$$

Приклад. Знайти аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Оскільки $\alpha = arctg\left|\left(-\sqrt{3}\right)/1\right| = arctg\sqrt{3} = \pi/3$, а вектор, що відповідає даному комплексному числу знаходиться в IV чверті ($x = 1$, $y = -\sqrt{3}$) то аргументом комплексного числа z буде кожен з кутів: $(\arg z)_k = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

До цих пір ми розглядали комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, для побудови якого користувалися відомою ще зі школи, так званою, декартовою системою координат. Положення точки на площині цілком визначається, якщо замість значень абсциси та ординати задати відстань ρ від початку координат до точки та кут φ, який утворюється додатним напрямом (проти годинникової стрілки) вісі абсцис та напрямком з початку координат на цю точку (рис. 2). Така система координат називається полярною. Розглянемо комплексне число $z = x + iy$ у полярній системі координат, сумістивши її початок з початком декартової системи координат.

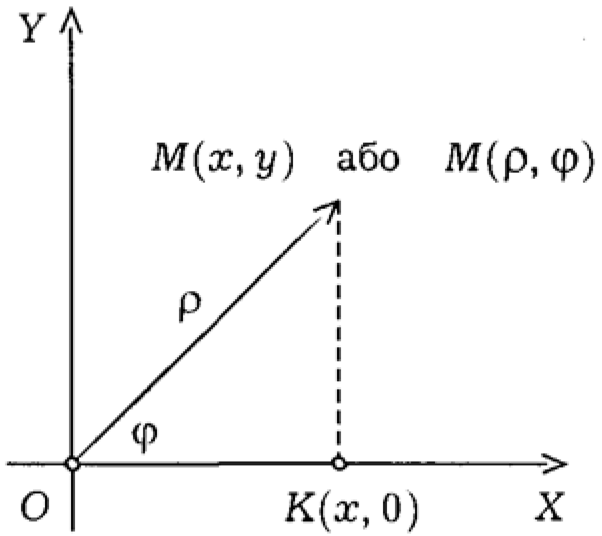


Рис. 2

Очевидно, що величина ρ є модулем комплексного числа z, а кут φ є його аргументом, тобто:

$$\rho = |z|, \quad \varphi = \arg z .$$

Як видно з трикутника KOM $x = \rho \cos\varphi$, $\quad y = \rho \sin\varphi$

Тоді комплексне число $z = x + iy$ може бути записане так:

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) .$$

Ця форма запису називається *тригонометричною формою комплексного числа* z. Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

Записати в тригонометричній формі комплексне число $z = 1 + i$.

Знайдемо модуль та аргумент цього числа:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} .$$

Оскільки число $1+i$ знаходиться в першій чверті комплексної площини, то

$$\varphi = \alpha = arctg\left|\frac{1}{1}\right| = \frac{\pi}{4} .$$

Тоді

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Нехай є два комплексних числа:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \quad \text{та} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) .$$

Добуток комплексних чисел $z_1 \cdot z_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_2 + \varphi_2)],$$

Тобто $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_2 + \varphi_2)]$.

Оскільки комплексне число $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, то одержимо

$$\rho = \rho_1\rho_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

або інакше: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

тобто, *при множенні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.* Очевидно, що це правило поширюється на будь-яку скінченну кількість множників.

Частка комплексних чисел z_1/z_2, причому $z_2 \neq 0$, тобто $\rho_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2),$$

тобто: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Звідки одержимо: $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,

або: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

Таким чином, *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, а аргумент $-$ різниці їх аргументів.*

Приклади. Подати у тригонометричній формі числа:

а) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

$|z| = \sqrt{2+2} = 2$; $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow z = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

б) $z = i$.

$|z| = 1$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;

в) $z = -3$.

$|z| = 3$; $\alpha = \pi \Rightarrow z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

Виконати множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі:

а) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{6}i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

б) $z_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$; $z_2 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$

$z_1 \cdot z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$, $\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$.

$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Добування кореня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Позначимо шукану величину $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, тоді:

$$\sqrt[n]{z} = w = r(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Згідно з означенням кореня:

$$z = w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Порівнюючи з виразом для z, одержимо:

$$r^n = \rho, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Оскільки r і ρ – додатні числа, то $r = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$, $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$, де $(\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$ за означенням “звичайний” додатний арифметичний корінь. Остаточно одержуємо:

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким чином, *корінь $n-$го степеня з комплексного числа z має n різних значень і всі вони розташовані на колі радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ із центром у точці нуль і ділятъ це коло на n рівних частин.* Єдиним винятком є число $z=0$, всі корені якого дорівнюють нулю.

Різні значення кореня одержуються з наданням числу k значень від 0 до $n-1$.

Приклади. **а)** $\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ \ k=0,1,2,3$

$z_1=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi'}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ z_2=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);\ z_3=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$

$z_4=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$

б) Розв’язати рівняння $z^3+8=0$.

Подамо рівняння у вигляді $z=\sqrt[3]{-8}$. Комплексне число -8 має модуль $\rho=8$ та аргумент $\varphi=\pi$, оскільки воно знаходиться на від’ємній частині осі абсцис. Маємо:

$$\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

При цьому:

$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$, при $k=0$;

$z_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$, при $k=1$;

$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$, при $k=2$.

1.5 ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

У різноманітних розділах сучасної математики, а також в електротехніці, радіотехніці, гідравліці та інших технічних дисциплінах дуже поширена показникова форма комплексного числа. В її основі лежить відома формула Ейлера, яку ми подамо без доведення:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z .$$

Ця формула була отримана видатним математиком Леонардом Ейлером (1707-1783) в 1743 році. Ірраціональне число $e \approx 2{,}71828\ldots$, яке є основою показникової функції, відіграє в математиці не менш важливу роль, ніж число π. Детальніше показникові функції з основою e будуть розглянуті нами в теорії функцій.

Якщо в формулі $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ замінити z на $-z$, то очевидно, що ми одержимо формулу: $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$.

Якщо розглянути формули (3.69) та (3.70) разом іпочленно додати та відняти їх, то ми отримаємо дуже важливі формули, які також називаються формулами Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Формули також дають можливість отримати дуже важливі співвідношення між степенями синусів та косинусів через синуси та косинуси кратних дуг і навпаки. Наприклад,

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i\cdot 3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i\cdot 3x}}{8} = \frac{e^{i\cdot 3x} + e^{-i\cdot 3x}}{8} + \frac{3}{8}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

Якщо тепер комплексне число z записати в алгебраїчній формі і скористатися властивостями показникової функції, то ми одержимо:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Порівнюючи з тригонометричною формою комплексного числа маємо:

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Утім оскільки e^z є також комплексне число, то переозначивши e^z знову через z, і враховуючи, що $|e^z|>0$ і $e^z \neq 0$, одержимо формули для модуля та аргументу показникової функції комплексного числа

$$|z| = e^x, \quad \arg z = y$$

або поклавши $|z| \equiv \rho$, $\arg z \equiv \varphi$:

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y .$$

Таким чином, довільне комплексне число z може бути представлене в *показниковій формі*, як $z = |z| e^{i\arg z}$ або $z = \rho e^{i\varphi}$.

Інколи значно зручніше при виконанні деяких алгебраїчних дій над комплексними числами користуватися їх показниковою формою.

Розглянемо дії над комплексними числами в показниковій формі.

Періодичність показникової форми комплексного числа. Неважко побачити, що для показникової форми комплексного числа справедлива рівність: $e^{z+2\pi i} = e^z$. Дійсно, маємо:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z(1 + i \cdot 0) = e^z .$$

Отже, *показникові форма комплексного числа є періодичною функцією періоду* $2\pi i$.

Добуток комплексних чисел $z_1 \cdot z_2$. Нехай є два комплексних числа: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

тобто $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Оскільки добуток комплексних чисел є також комплексне число $z = \rho e^{i\varphi}$, то одержимо $\rho = \rho_1 \rho_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, або $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Отже, *при множенні комплексних чисел в показниковій формі їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.*

Частка комплексних чисел z_1/z_2, причому $z_2 \neq 0$, тобто $\rho_2 \neq 0$. Нехай є два комплексних числа: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ та. $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ Тоді

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \text{тобто } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Звідки одержимо: $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, або $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Таким чином, *модуль частки двох комплексних чисел в показниковій формі дорівнює частці їх модулів, а аргумент* $-$ *різниці їх аргументів.*

Піднесення комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$ **до цілого додатнього степеня** n. Правило множення комплексних чисел поширюється на будь-яку кількість співмножників. Зокрема, якщо всі співмножники взяти рівними, то одержимо формулу $z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$, або $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n \arg z$. Отже, *при піднесенні комплексного числа в показниковій формі до степеня, модуль його підноситься до того ж степеня, а аргумент множиться на показник степеня.*

Добування кореня з комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$. Позначимо шукану величину $w = re^{i\psi}$. Тоді $\sqrt[n]{z} = w = re^{i\psi}$.

Згідно з означенням степеня $z = w^n = r^n e^{in\psi}$.

Порівнюючи з виразом для $z = \rho e^{i\varphi}$, одержимо:

$$r^n = \rho, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Оскільки r і ρ $-$ додатні числа, то

$$r = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де під виразом $(\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$ мається на увазі “звичайний” додатний арифметичний корінь. Остаточно одержуємо:

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Таким чином, *корінь $n-$го степеня з комплексного числа має n різних значень, які дорівнюють арифметичному кореню з його модуля, помноженому на показникову функцію його аргументу.*
Різні значення кореня отримуються наданням числу k значень від 0 до $n-1$.

Приклади.

1. Подати в показниковій формі комплексні числа:

а) $1=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k=e^{2\pi ki}$;

б) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$;

в) $-3=\cos\pi+i\sin\pi=3e^{\pi i}$;

г) $-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

2. Записати комплексне число $z=\sqrt{3}-i$ в показниковій формі.

Модуль $|z|=\sqrt{3+1}=2$. Аргумент $\varphi=-\pi/6$. Маємо: $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

3. Подати в показниковій формі комплексне число $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{18}$.

Модуль даного числа буде:

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,$$

а аргумент, $\varphi=\alpha=arctg\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

Тоді $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{18}=e^{\frac{\pi}{3}\cdot 18i}=e^{6\pi i}$.

ТЕМА: ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Уявлення про границі полягає в тому, що границя – це стала, до якої нескінченно наближається змінна величина. Це поняття використовується для описання багатьох явищ навколишнього світу.

Означення функції: нехай маємо множину X дійсних чисел. Якщо кожному числу x є X за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число y є Y, то кажуть, що на множині X визначено функцію і записують $y = f$, або $y = f(x)$.

При цьому множина X називається множиною визначення, а множина Y - множиною значень функції: x - називають аргументом, або незалежною змінною, y - залежною змінною, $f(x)$ - значенням функції.

До основних елементарних функцій відносяться:

1. Степенева $y = x^{\alpha}(\alpha \in R)$
2. Показникова $y = a^{x}(a > 0; a \neq 1)$
3. Логарифмічна $y = \log_a x(a > 0; a \neq 1)$
4. Тригонометрична $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.
5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$,
6. Стала $y = C$.

Види елементарних функцій:

1. Цілі раціональні, або многочлени $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ $a_n \in R \quad n \in N$.
2. Дробово раціональні $y = \dfrac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_nx^n}$ $\begin{matrix} a_n, b_n \in R \\ n, m \in N \end{matrix}$.
3. Ірраціональні типи $y = \sqrt[n]{f^{m}(x)}$.
4. Алгебраїчні, не розв’язані відносно y (неявні)

Усі інші функції називають трансцендентними.

- обернена функція: $y = f(x)$ - пряма

$x = \varphi(y)$ - обернена.

Властивості функцій:

1. Парність та непарність функції.

Непарна: $f(-x) = -f(x)$ - графік симетричний відносно початку координат.
Парна: $f(-x) = f(x)$ - графік симетричний відносно осі OY.

2. Періодичність: $f(x+T) = f(x)$, T - період функції.

3. Означення зростаючої та спадаючої функції:

Зростаюча: при $x_2 > x_1 \quad f(x_2) > f(x_1)$

Спадаюча при $x_2 > x_1 \quad f(x_2) < f(x_1)$

Границя функції однієї змінної

Поняття границі функції (послідовності) є одне із фундаментальних понять математичного аналізу.

Числова послідовність - це сукупність чисел $y_1, y_2, ... y_n, ...$, які занумеровано числами натурального ряду, причому $y_n = f(n)$, і які записано в порядку зростання аргументу.

Границя числової послідовності - стале число A називається границею послідовності $y_1, y_2, ... y_n$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність:

$$| y_n - A | < \varepsilon \text{. Або записують } \lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ .}$$

Для визначення границі послідовностей не завжди зручно використовувати означення границі. Використовування наступних теорем спрощує задачу.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n + V_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n + \lim\limits_{n\to\infty} V_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot U_n) = C \lim\limits_{n\to\infty} U_n, \quad C - const, \quad \neq 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n \cdot V_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} V_n$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} U_n}{\lim\limits_{n\to\infty} V_n}; \quad \lim\limits_{n\to\infty} V_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Поняття нескінченно малої (нескінченно великої) послідовності переноситься на функції майже без змін, а саме: функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ називається нескінченно малою в точці $\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{x}_0$ може бути нескінченністю), якщо

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Поняття еквівалентних нескінченно малих дає можливість замінити нескінченно малі еквівалентними їм у добутках і частках (але не у сумах і різницях).

Використання еквівалентних нескінченно малих (нескінченно великих) корисно при обміркуванні фізичного змісту багатьох формул і значно полегшує техніку обчислення границь відношення і добутку функцій (заміна еквівалентними в сумі потребує деякої обережності).

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

При $\alpha(x)\to 0$ справедливі наступні асимптотичні рівності:

1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$		
2	$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$		
3	$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$		
4	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$		
5	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$		
6	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$	6’	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
7	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$	7’	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$
8	$(1+\alpha(x))^p-1\sim p\alpha(x)$		

Користуючись цією таблицею можна отримати таблицю нескінченно малих в околі будь-якої точки. Наприклад, при $x\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^p-1\sim\frac{p}{x};\ arctg\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x};\ 2^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{\ln 2}{x}.$$

Приклад 1. Знайти границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{3x^4+2x^2+5x+19}$;

Розв’язання: $2x^3+3x+7\sim 2x^3$, $3x^4+2x^2+5x+19\sim 3x^4$ $(x\to\infty)$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{3x^4+2x^2+5x+19}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{3x^4}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$;

Приклад 2. Користуючись правилом заміни еквівалентними нескінченно малими, знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ (використовували формули 6 та 7 таблиці);

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{3(x-1)}-1}{\sin 2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)}{2(x-1)}=\dfrac{3}{2}$ (використовували формули 1 та 7 таблиці);

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(3x^2\right)}{x^2 arctg^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^4}{x^2\cdot 4x^2}=\dfrac{9}{4}$ (використовували формули 1 та 5 таблиці);

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left|y=x-1\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+y}-1}{\sqrt{1+y}-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{y}{3}}{\frac{y}{2}}=\dfrac{2}{3}$

(використовували формулу 8 таблиці);

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos\left(x^2-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left|y=x-1\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y\left(y+2\right)}{\left(\sqrt{1+y}-1\right)^2}=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{y^2\left(y+2\right)^2}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=8$ (використовували формули 3 та 8 таблиці);

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{4}{x^2}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=4$ (використовували формулу 7 таблиці);

Приклади.

а) Обчислити границю послідовності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^2}{3n^2+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{5}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\dfrac{1}{3}\cdot$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n}}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}}=\dfrac{0}{1}=0\cdot$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}=\dfrac{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{9}{8}\,.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(1+n+1)}{n!(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)}=0.$

б) Обчислити границю функції:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2},$

оскільки $\sin 5x\sim 5x$ в точці $x_0=0$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgmx}{nx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{nx\cos mx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}\ (\cos 0=1).$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot\dfrac{x^2}{4}}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

6. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\begin{vmatrix}x-e=y\\ x=e+y\end{vmatrix}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(e+y)-1}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(e+y)-\ln e}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln\dfrac{e+y}{e}}{y}=$

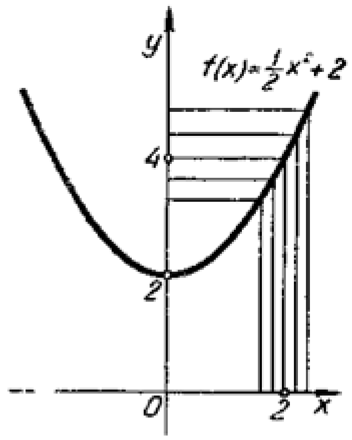
$=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{y}{e}\right)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\dfrac{y}{e}}{y}=\dfrac{1}{e}.$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}\left(e^{3x}-1\right)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}\cdot 3x}{x}=3.$

Скінчена границя.

Існування скінченої границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ рівнозначно тому, що $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

Приклад. Функція $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, якщо $x \neq 0$, має в точці праву границю, що дорівнює 1, і ліву границю, що дорівнює -1. Вона не має границі в точці 0.



Розглянемо функцію *y = f (x),* де аргумент змінюється неперервно (набуває всіх значень з певного проміжку $\langle a;b \rangle$, крім, можливо, однієї внутрішньої точки даного проміжку).

Наведемо два приклади.

Приклад 1. Простежимо, як поводить себе функція ***f (x)*** = $\frac{1}{2}x^2$ + 2, коли значення аргументу ***x*** як завгодно близько наближається до числа 2. Символічно це позначають так: ***x*** → *2*. З малюнка випливає, що коли ***x*** → 2 зліва або справа, то відповідні значення функції ***f (x)*** як завгодно близько наближаються до числа **4**, тобто ці значення мало відрізнятимуться від числа **4**.

У такому разі кажуть, що функція ***f (x)*** = $\frac{1}{2}x^2$ + 2, має границею число 4, якщо ***x*** → **2**, або в точці ***x₀*** **= 2**, Символічно це записують так: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) = 4.$

Число $\boldsymbol{A}$ *називається границею функції* $\boldsymbol{y = f\ (x)}$ *у точці* $\boldsymbol{x_0}$ *, якщо для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $\delta(\varepsilon) > 0$*, що для всіх* $\kappa \in \langle a;b\rangle, x \neq x_o$ і *таких, що* $|x - x_0| < \delta$*, виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = A, \text{ або } f(x) \underset{x\to x_o}{\to} A$$

<u>Приклад 2.</u> Довести, що $\lim_{n\to\infty}(2x+1) = 3.$

Розв'язання. Під знаком границі є лінійна функція $\boldsymbol{y=kx+b}$ *(k=2,b=1).*

З попереднього прикладу випливає, що лінійна функція $y = kx + b$ у будь-якій точці $\boldsymbol{x \to a}$ має границю $\boldsymbol{A}$. Границя дорівнює значенню цієї функції у точці

$\boldsymbol{x = a}$, тобто $\boldsymbol{A = ka + b}$. Отже, у даному прикладі $\boldsymbol{A = 2 \bullet 1 + 1 = 3}$. Задача розв'язана.

Перша та друга знаменні границі.

Дві границі, про які будемо говорити нижче, відіграють в математиці надзвичайну роль. За їх допомогою можна знайти границі, в яких зустрічаються тригонометрична, обернена тригонометрична, показникова та логарифмічна функції.

Перша знаменна границя. Спробуємо з’ясувати, чи існує границя функції $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. З цією метою обчислимо значення цієї парної функції за декількох достатньо малих значень $\boldsymbol{x}$:

x **(рад)**	**0,5**	**0,125**	**0,01**	**0,005**
$\frac{\sin x}{x}$	**0,958851**	**0,997398**	**0,999083**	**0,999996**

Складається уявлення, що границя функції $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ існує і дорівнює 1.

Строге доведення цього факту ґрунтується на теоремі про границі (*Якщо в деякому проколотому околі* $\overset{0}{U}(x_0)$ *точки* x_0 *виконується нерівність* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *та* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$*, то існує* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$*)* і випливає з нерівності $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ $\left(x \in \overset{0}{U}(0) \right)$. Отже,

(прим. Проколотий окіл т. ***a*** *–це окіл точки* ***a****, з якого викинули* ***a.)***

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Оскільки $\dfrac{1}{x} = o(1)$ $(x \to \infty)$, а $|\sin x| \le 1$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ і, отже, графік функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ має наступний вигляд (рис. 2.):

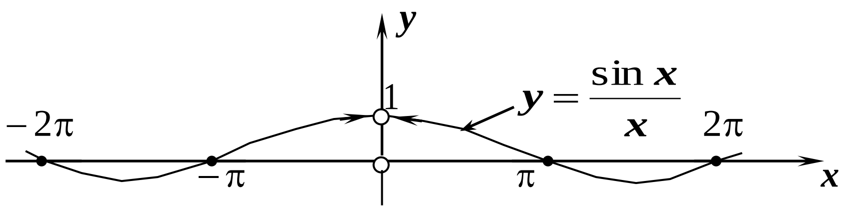


Рис. 2.

Сенс першої знаменної границі полягає в тому, що синус малого кута практично дорівнює величині цього кута (в радіанах):

$$\boxed{\lim_{\alpha(x) \to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sin \alpha(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)),\ \alpha(x) \to 0.}$$

Друга знаменна границя. Функція $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ зростає при $x \to +\infty$ (в це можна повірити, обчисливши на калькуляторі значення $f(2) = 2.25$, $f(3) = 2.37037$, $f(100) = 2.704814$, $f(1000) = 2.716924$).

Крім того ця функція обмежена при $x \to +\infty$: $f(x) < 3$. Тоді функція $f(x)$ має границю при $x \to +\infty$, яку прийнято позначати буквою e (рис. 3). Число $e = 2.718281828459045\ldots$ ірраціональне. Отже,

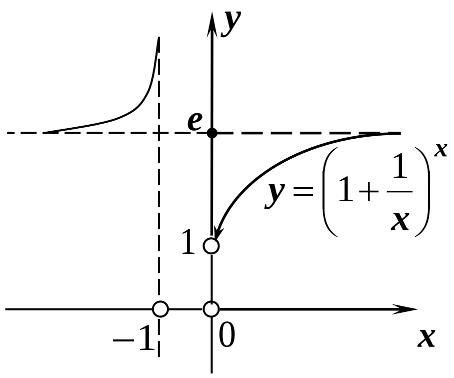
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Більш того,

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e.}$$

Зокрема,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a\ (a \in R).$$



Число e, натуральний логарифм.

Логарифми з основою e називаються натуральними і позначаються $\ln$.

Слід відзначити, що функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ прямує при $\boldsymbol{x} \to +\infty$ до числа e дуже повільно. Набагато швидше прямує до e функція $\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$: $\varphi(100) = 2.718304$; $\varphi(1000) = 2.718282$.

Перша та друга знаменні границі дозволяють суттєво розширити запас еквівалентних нескінченно малих величин.

Основні теореми про границі

ТЕОРЕМА 1. (Арифметичні властивості скінчених границь). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають в точці x_0 скінчені границі A та B відповідно, то в цій точці мають скінчені границі функції

1) $f(x)+g(x)$,

2) $f(x)\cdot g(x)$,

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(B\neq 0)$.

А саме:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\\[2mm] \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\end{array}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}1)\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B,\\[2mm] 2)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B,\\[2mm] 3)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0).\end{array}}$$

Твердження теореми зберігається і при $x\to\pm\infty,\ \infty$.

В тому випадку, коли хоча б одна з границь нескінченна або границя знаменника дорівнює нулю, теорему про арифметичні властивості границь не завжди можна застосовувати.

Приклад.

Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{5x^3-2x^2+x+2}$.

Розв’язання.

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1;$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2};$

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+5}{x+1}=3;$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{5x^3-2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{2}{5}.$

ТЕОРЕМА 2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq0$, то в деякому проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки $\boldsymbol{x_0}$ функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є обмеженою, а функція $f(x)$ має той самий знак, що і число A.

ТЕОРЕМА 3. Якщо в деякому проколеному околі $\overset{0}{U}(x_0)$ точки x_0 виконується нерівність $f(x)\le h(x)\le g(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

ТЕОРЕМА 4. Якщо в деякому околі $\boldsymbol{U}(+\infty)$ функція $f(x)$ зростає і виконується нерівність $f(x) \le M$, то існує $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \le M$.

ТЕОРЕМА 5. Нехай в околі точки $\boldsymbol{x}_0$ задано складену функцію $f(g(x))$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ $(g(x) \ne b$ при $x \ne x_0)$, а $\lim\limits_{u\to b} f(u) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (можливо, що x_0 один з символів $\pm\infty, \infty$).

Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, будемо використовувати позначення $f(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$, яке читається “ $f(x)$ дорівнює o мале від 1 при $x \to x_0$”.

Наприклад:

1) $\sin x = o(1)$ $(x \to 0)$; 2) $x^p = o(1)$ $(x \to +0)$ $p > 0$;

3) $x^p = o(1)$ $(x \to +\infty)$, $p < 0$;

4) $q^n = o(1)$ $(n \to +\infty)$, $|q| < 1$;

5) $a^x = o(1)$ $(x \to +\infty)$, $0 < a < 1$.

Приклад. Величини $tg\, x$, $\log_a(x+1)$, $2^x - 1$ є нескінченно малими при $x \to 0$. При $x \to 1$ нескінченно малими будуть функції $(x-1)^2(x+2)$, $\sin(x-1)$. Функції $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{(x-1)^2}$, $\frac{x+5}{x^2-1}$ є нескінченно малими при $x \to \infty$.

Справедливі наступні твердження:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = A + o(1)\ (x \to x_0)}$

($A \in R$, $x_0 \in R$ чи будь-який з символів $\pm\infty, \infty$);

2) лінійна комбінація й добуток скінченного числа функцій, які є нескінчено малими при $x \to x_0$, є функція, яка нескінченно мала при $x \to x_0$.

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Сума нескінченно великих функцій не завжди є нескінченно великою функцією $\left(f_1(x) = \frac{1}{x},\ f_2(x) = \frac{x-1}{x},\ x \to 0 \right)$.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами такий:

1) якщо $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$ $\left(f(x) \neq 0, \text{ якщо } x \in \overset{0}{U}(x_0) \right)$, то $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$;

2) якщо $f(x)$ є нескінченно великою при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ буде нескінченно малою величиною при $x \to x_0$;

Приклад. Величини x, x^2, x^3 є нескінченно малими при $x \to 0$. Зворотні величини $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ будуть нескінченно великими при $x \to 0$. При цьому тільки $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ ($x \to 0$), а величини $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{x^3}$ не прямують ні до $+\infty$, ні до $-\infty$ (обміркуйте це, побудувавши графіки функцій).

Приклади:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, отже, x^2 є нескінченно малою, більш великого порядку мализни, ніж x при $x \to 0$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, отже, x є нескінченно великою величиною, більш низького порядку, ніж нескінченно велика x^2 при $x \to \infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Величина $\dfrac{1}{x^2}$ є нескінченно великою, більш високого порядку, ніж нескінченно велика $\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+5}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{x}=0$. Нескінченно велика x^3 більш високого порядку, ніж нескінченно велика $2x^2+x+5$ при $x\to\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0\Rightarrow$ величина $(x-2)^3$ є більш високого порядку мализни, ніж $(x-2)^2$ $(x\to 2)$ (швидше прямує до 0).

Нескінченно малі (нескінченно великі) функції f та g називаються **еквівалентними (асимптотично рівними**) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Звичайно для еквівалентних функцій застосовують позначення

$$\boxed{f(x)\sim g(x),\ x\to x_0}$$

і кажуть, що функції $f(x)$ та $g(x)$ асимптотично рівні в точці x_0. Прийнято в асимптотичній рівності зліва писати громіздку функцію, яка вивчається, а справа – більш просту, яку вже вивчено до цього. Тоді функція $g(x)$ називається **головним членом** асимптотичної рівності (асимптотичною формулою), а різниця $f(x)-g(x)$ - її залишком.

Питання і вправи до самоконтролю

1. Що таке числова послідовність? Навести приклади.
2. Сформулювати означення границі числової послідовності.
3. Яка послідовність називається нескінченно малою? Навести приклади.
4. Сформулювати теореми про властивість нескінченно малих послідовностей.
5. Сформулювати основні теореми про границі числових послідовностей.
6. Сформулювати означення границі функції в точці. Навести приклади границь, якщо в точці функція існує, якщо не існує.
7. Яка функція називається нескінченно малою, нескінченно великою?
8. Дати означення еквівалентних нескінченно малих.
9. Записати першу та другу визначні границі.
10. Сформулювати означення неперервної в точці функції. Навести приклади неперервної і розривної в точці функцій.
11. Яка функція називається неперервною на проміжку. Навести приклади.
12. Знайти границі послідовностей: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

1) $\dfrac{3n^2-7n+1}{3-2n+9n^2}$; 2) $\dfrac{7n^3+5n^2+1}{3-4n-9n^2}$; 3) $\dfrac{(n+3)^2-(n-1)^2}{3n^2+2n+1}$; 4) $\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^2-3n}$; 5) $\dfrac{3n-1}{2+n}-\dfrac{1+n^2}{7-n}$; 6) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; 7) $\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$.

13. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+4x-5}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6-x)^2-(6+x)^2}{(6+x)^2-(1-x)^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 9x}{7x}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 9x}{3x^2}$; 13) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x\cos 5x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 9x}{2x}\right)^{1-x}$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{1+x}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; 19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$; 20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{x^2}$; 22) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sin(x^2-25)}{\ln(x-4)}$.

ТЕМА: ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Поняття похідної

Одне з основних понять природознавства – поняття похідної – виникло з розв'язку двох практично важливих задач:

1). задачі про визначення швидкості при неперервному русі;

2). задачі про проведення дотичної до лінії.

Тут, як і в інших прикладних задачах, наочно проявляється наступне:

- практика приводить до деякого поняття (наприклад швидкості),

- математика чітко визначає це поняття й виробляє метод, користуючись яким, можливо доповнити експериментальне уявлення про це поняття, наприклад про швидкість з можливістю її теоретичного обчислення.

Відносний приріст функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0. **Відносним приростом** функції $f(x)$ в точці x_0 називається величина $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Приклад 1. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox і

$x(t)$ - її координата в момент часу t.

Тоді $v_{сер}$ цієї точки на відрізку часу $[t_0;\, t_0 + \Delta t]$ дорівнює:

$$v_{сер} = \frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t}.$$

Дамо **геометричне тлумачення приросту**. Через точки графіка функції $f(x)$: $M_0(x_0;\ f(x_0))$ і $M(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$ проведемо січну $(M_0 M)$.

Припустимо, що ця січна утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\beta(\Delta x)$. Тоді з прямокутного трикутника $MM'M_0$ одержуємо $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = tg\beta(\Delta x)$ (рис. 1.).

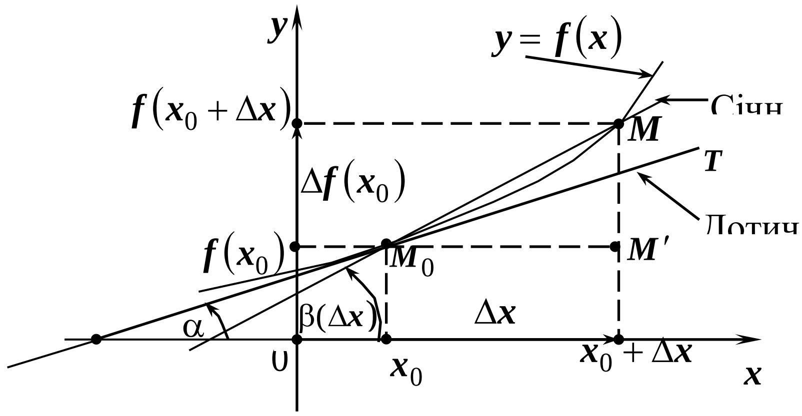


Рис. 1.

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0.

Назвемо **похідною функції** $f(x)$ **в точці** x_0 **границю**, якщо вона існує і скінчена, **відносного приросту** $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ **при наближенні** Δx **до нуля**.

При цьому будемо казати, що функція $f(x)$ диференційована в точці x_0.

Похідну функції $f(x)$ **в точці** x_0 **позначають одним із таких символів:**

$$f'(x_0),\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Таким чином,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то з (1) виходить, що $\Delta f(x_0)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Тобто якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці. Таким чином, множина диференційовних в точці x_0 функцій є частиною множини неперервних функцій в цій точці.

Функція $f'(x)=\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ називається похідною функції $f(x)$.

Область визначення $D_{f'}$ функції $f'(x)$ не ширше за область визначення D_f функції $f(x)$: $D_{f'} \subset D_f$. Якщо функція є диференційовною в довільній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається диференційовною на цьому інтервалі.

Функція $f(x)$ називається **гладкою** на відрізку $[a; b]$, якщо на цьому відрізку неперервна функція $f'(x)$. Функція $f(x)$ називається **кусково-гладкою** на відрізку $[a; b]$, якщо цей відрізок можна розбити на скінчене число відрізків, в кожнім з яких функція $f(x)$ є гладкою.

Приклад. Знайти, якщо вона існує, похідну в точці $x_0 = 0$ таких функцій:

а) $y = f(x) = x^2$;

Розв'язання: а) $\Delta f(0) = (\Delta x)^2 - 0 = (\Delta x)^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \Delta x \to 0,$ якщо $\Delta x \to 0$.

Похідна існує і дорівнює 0: $\left(x^2\right)'_{|x=0} = 0$;

На основі правил диференціювання отримана таблиця похідних елементарних функцій, тоді для функції $f(x) = 3x^2$,

$\left(3x^2\right)' = 3'\, x^2 + 3\, (x^2)' = 6x$, тому що $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Усі правила та формули знаходження похідних доцільно записати у вигляді таблиці і добре запам'ятати тому, що вони часто використовуються.

Таблиця. Правила та формули для обчислення похідних

1	Якщо $y = C$, де C – стала, то $y' = 0$, або $C' = 0$		
2	$[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]' = f_1'(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n'(x)$		
3	$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$		
4	$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$		
5	Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$		
6	Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка в точці y має похідну $\varphi'(y) \neq 0$, то у відповідної точці x функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.		
7	Нехай залежність y від x задана параметрично у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ де t – параметр. $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.		
8	Похідну показникові – степеневої функції можна знайти методом логарифмічного диференціювання або за формулою: $\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.		
9	$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	10	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
11	$\left(e^x\right)' = e^x$	12	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
13	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	14	$(\sin x)' = \cos x$
15	$(\cos x)' = -\sin x$	16	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
17	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	18	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
21	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$		

Геометричний та фізичний зміст похідної

Назвемо **дотичною** до графіка функції $f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ граничне положення (якщо воно є) січної (M_0M) за умови, що точка $M(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$ необмежено наближається до точки M_0 (що рівносильно $\Delta x \to 0$).

Диференційованість функції $f(x)$ в точці x_0 рівнозначна існуванню в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ невертикальної дотичної з кутовим коефіцієнтом $tg\,\alpha = f'(x_0)$ (α - кут нахилу дотичної (M_0T) з додатним напрямом осі Ox (рис. 2.18)).

Більш докладно:

Нагадаємо, що $tg\,\beta(\Delta x) = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, де $\beta(\Delta x)$ - кут нахилу січної (M_0M) з додатним напрямом осі Ox. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в попередній рівності, отримаємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\,(\beta(\Delta x)) = tg\left(\lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)\right) = tg\,\alpha = f'(x_0)$$

(обидві границі існують). Отже існує граничне положення січної, причому tg кута нахилу дотичної дорівнює $f'(x_0)$.

Неважко упевнитися, що коли функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, **рівняння дотичної** до її графіка в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ має такий вигляд:

$$T:\ \boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Пряму, яка проходить через точку дотику $M_0(x_0;\ f(x_0))$ перпендикулярно дотичній до графіка функції $f(x)$ в цій точці, назвемо **нормаллю**. Якщо урахувати, що кутові коефіцієнти дотичної і нормалі задовольняють умові $k_{дот}\cdot k_{нор} = -1$, дістанемо рівняння нормалі:

$$N:\ \boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точці $M_0(1; -1)$.

Розв'язання.

Для того, щоб знайти кутовий коефіцієнт дотичної, обчислимо похідну функції $2x^2 - 6x + 3$ при $x_0 = 1$.

Маємо $f'(x_0) = \left(2x^2 - 6x + 3\right)'_{x_0=1} = (4x - 6)_{x_0=1} = -2$, і значить рівняння дотичної має такий вигляд:

$$\boxed{y = -1 - 2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 1.}$$

$$\boxed{\text{Рівняння дотичної: } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Рівняння нормалі буде таким:

$$y = -1 + \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\text{Рівняння нормалі: } y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Приклад. Знайти похідну функції $f(x) = x^3 - 4x$ в точці $x_0 = 1$. Дати геометричне тлумачення отриманому результату. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо відносний приріст в точці $x_0 = 1$:

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^3 - 4(1 + \Delta x) - (-1 - 4)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-\Delta x^3 - 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}.$$

Отже, $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = -1.$

Таким чином, тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в точці $M_0(1;\,-3)$ дорівнює –1. Це означає, що дотична утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 2).

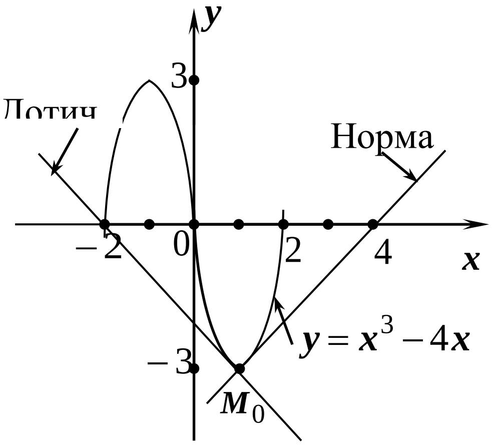


Рис. 2.

Рівняння дотичної і нормалі мають відповідно вигляд

$$y = -3 - (x-1) \Leftrightarrow y = -x - 2,$$

$$y = -3 + (x-1) \Leftrightarrow y = x - 4.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x_0) = +\infty(-\infty)$, або $f'(x_0) = \infty$, то в точці $M_0(x_0;\ f(x_0))$ графіка існує вертикальна дотична з рівнянням $x = x_0$. Характерні риси графіка в околі точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ в цьому випадку вказані на рис. 3.

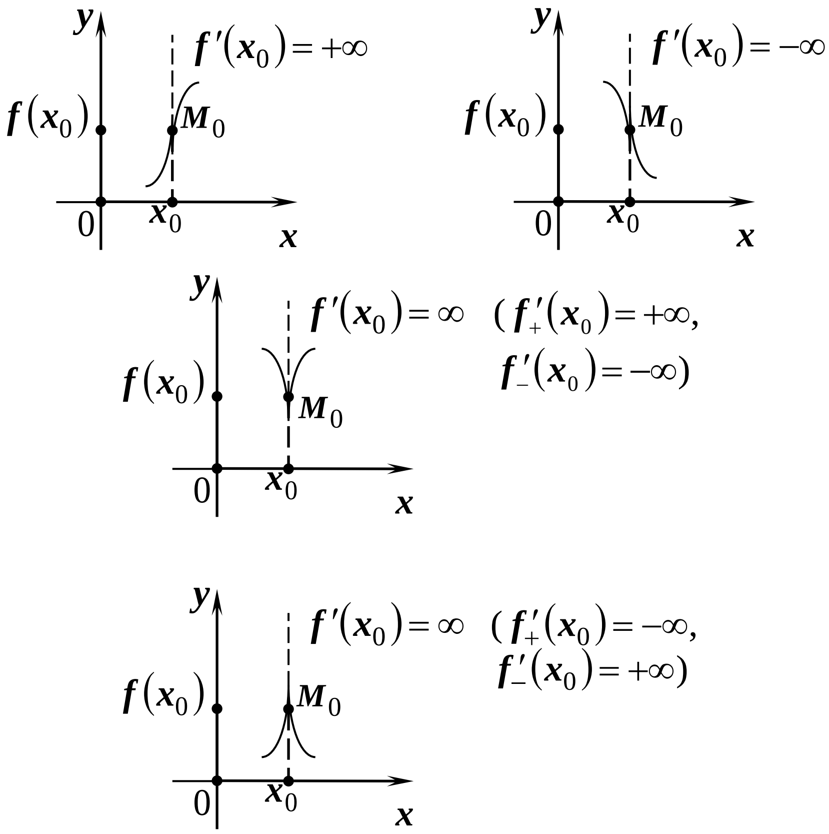


Рис. 3

Фізичний зміст похідної

Миттєва швидкість $v(t_0)$ матеріальної точки в момент часу t_0 дорівнює похідній від координати за часом в момент t_0:

$$v(t_0)=\frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}.$$

Сила струму $i(t_0)$ в момент часу t_0 є похідною від заряду за часом в момент часу t_0:

$$i(t_0)=\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

Таким чином, задачі з різноманітних розділів природознавства (геометрії, механіки, електрики) розв’язуються за допомогою однотипних міркувань. Саме в цьому полягає особлива роль похідної при вивченні оточуючого нас світу.

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ.

Нехай функція $f(x)$ диференційована в точці $\boldsymbol{x}_0$ (має скінчену похідну $f'(x_0)$). Тоді приріст функції в цій точці може бути подано у вигляді:

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),}$$

де $\boldsymbol{o}(\Delta \boldsymbol{x})$ - нескінченно мала величина більш високого порядку мализни, ніж $\Delta \boldsymbol{x}$. Якщо величина $o(\Delta x) \neq 0$, то приріст $\Delta f(x_0)$ є нелінійною нескінченно малою величиною, що залежить від Δx.

Диференціалом $df(x_0)$ диференційованої в точці x_0 функції $f(x)$ називається лінійна відносно Δx частина $f'(x_0)\Delta x$ приросту $\Delta f(x_0)$:

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x,}$$

Отже, диференціал залежить від точки $\boldsymbol{x}_0$, де він обчислюється, і від приросту незалежної змінної Δx.

Диференціал dx незалежної змінної не залежить від x і дорівнює Δx. Дійсно, нехай $f(x) \equiv x$. Тоді $df(x) \equiv dx = (x)'\Delta x = \Delta x,$ і приходимо до більш симетричної форми запису диференціала: $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Таким чином, введений раніше для позначення похідної символ $\dfrac{df}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів (df, поділене на dx).

Структура диференціала значно простіша, ніж структура приросту, оскільки диференціал є лінійною функцією. З точністю до нескінченно малих вищого порядку в порівнянні з Δx має місце наближена рівність:

$$\boxed{\Delta f(x_0) \approx df(x_0).}$$

І абсолютна $|\Delta f(x_0) - df(x_0)|$ і відносна $\left|\dfrac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta f(x_0)}\right|$ похибки наближеної рівності прямують до нуля при $\Delta x \to 0$.

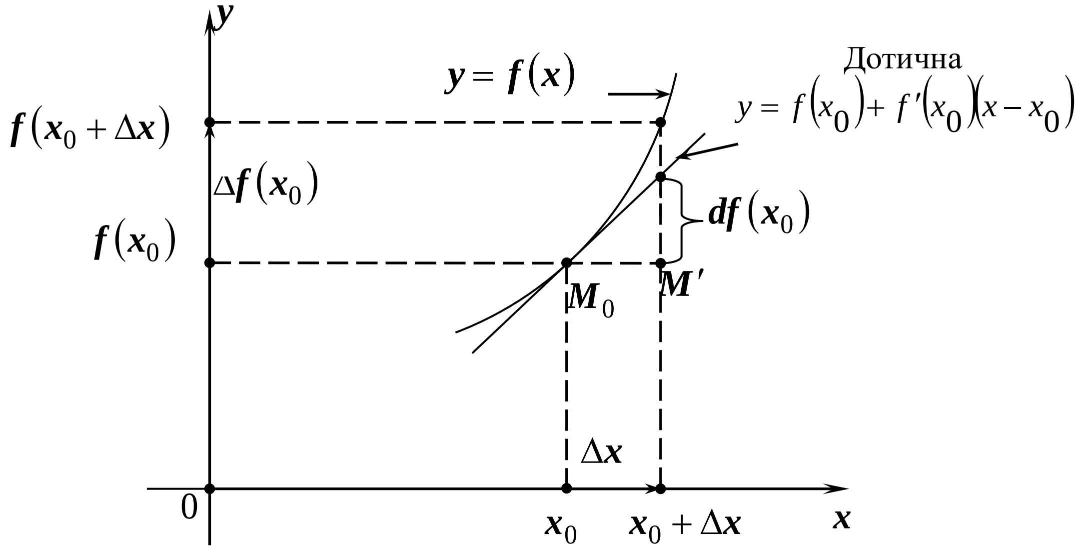
Наближену рівність можна переписати у вигляді:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Позначимо $x = x_0 + \Delta x$. Тоді останнє співвідношення записується наступним чином:

$$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).}$$

Зміст формули (2.3) такий: в околі точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ ордината дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці M_0 мало відрізняється від ординати графіка. Тому в околі цієї точки графік функції з достатньо великою точністю може бути замінений дотичною (рис. 1).



Похідні вищих порядків

Похідна від $f'(x)$ називається **другою похідною** функції $f(x)$.

Позначається друга похідна одним із символів $f''(x),\ \dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Отже, $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

Функція $f(x)$ називається двічі диференційованою в точці x_0, якщо величина $f''(x_0)$ скінчена. Функція двічі диференційована на деякій множині, якщо вона двічі диференційована в кожній точці цієї множини.

Якщо матеріальна точка рухається вздовж осі Ox і $x(t)$ - координата точки в момент часу t, тоді друга похідна $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ визначає прискорення точки.

Похідна від $(n-1)$-ї похідної функції $f(x)$ називається n-ою похідною функції $f(x)$:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Функція $f(x)$ називається n разів диференційованою в точці x_0, якщо величина $f^{(n)}(x_0)$ скінчена. Функція n раз диференційована на деякій множині, якщо вона n разів диференційована в кожній точці множини.

Якщо функція n разів диференційована в точці x_0, то існує окіл точки x_0, в кожній точці якого функція диференційована $n-1$ разів. Якщо функція $f(x)$ n разів диференційована на деякій множині, то функції $f(x)$, $f'(x)$,..., $f^{(n-1)}(x)$ неперервні на цій множині, але функція $f^{(n)}(x)$ не обов'язково неперервна на ньому.

Застосування диференціала у наближених обчисленнях.

Приклад 1. Обчислити наближено $\sqrt[3]{27.02}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\sqrt[3]{x}$ і припустимо, що $x_0=27$, $\Delta x=0.02$. Тоді диференціал функції $\sqrt[3]{x}$ дорівнює:

$$d\left(\sqrt[3]{x}\right)_{|27}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}|27\,\Delta x=\frac{0.02}{27}\approx 0.00074$$

Отже, $\sqrt[3]{27.02}\approx\sqrt[3]{27}+0.00074=3.00074$.

Приклад 2. Знайти наближене значення функції $f(x)=x\ln(x-2)$ при $x=3.001$.

В точці $x_0=3$ значення функції дорівнює нулю. Знайдемо диференціал функції в точці $x_0=3$, що відповідає приросту $\Delta x=0.001$:

$$df(3) = \left(x\ln(x-2)\right)_3' \cdot \Delta x = 3 \cdot 0.001 = 0.003.$$

Отже, $\Delta f(3) \approx 0.003$. І тому

$$f(3.001) \approx f(3) + \Delta f(3) \approx 0.003\,.$$

Приклад 3. Знайти приріст і диференціал функції $2\boldsymbol{x}^2 - 3\boldsymbol{x}$ в точці $x_0 = 1$ при $\Delta x = 1;$ $\Delta x = 0.1;$ $\Delta x = 0.01$. Для кожного значення Δx знайти абсолютну $|\Delta f - df|$ і відносну $\left|\dfrac{\Delta f - df}{\Delta f}\right|$ похибки.

Розв'язання.

$$\Delta f(1) = 2(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) - (-1) = \Delta x + 2(\Delta x)^2\,;$$

$$\Delta x = 1 \Rightarrow \Delta f(1) = 3\,,\ df(1) = f'(1)1 = 1\,,\ |\Delta f(1) - df(1)| = 2\,,$$

$$\left|\frac{\Delta f(1) - df(1)}{\Delta f(1)}\right| = 0.6667\,.$$

При такому прирості незалежної змінної заміна приросту диференціалом приведе до хибного результату.

$$\Delta x = 0.1 \Rightarrow \Delta f(1) = 0.12\,,\ df(1) = f'(1) \cdot 0.1 = 0.1,\ |\Delta f(1) - df(1)| = 0.02,$$

$$\left|\frac{\Delta f(1) - df(1)}{\Delta f(1)}\right| = 0.1667.$$

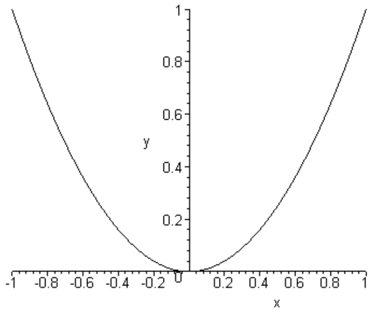
ТЕМА: ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

1. МОНОТОННІСТЬ ФУНКЦІЇ.

Теорема Ферма дає необхідну, але не достатню умову існування екстремуму в точці, де функція має похідну.

Приклади.

1) $f(x) = x^2$



Функція $f(x) = x^2$, очевидно, в точці $x_0 = 0$ має мінімум. Похідна $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$. Дотична горизонтальна.

Похідна неперервної функції $f(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$ не існує (похідна з ліва дорівнює $f'_- = -1$, а з права $f'_+ = 1$. Дотична в кутовій точці не визначена). Однак, очевидно, при $x_0 = 0$ маємо мінімум.

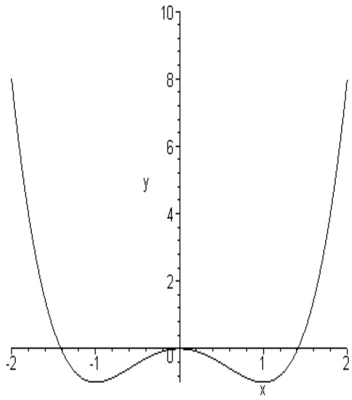
Достатні умови екстремуму базуються на геометричному тлумаченні похідної і пов'язані з поняттям монотонності функції.

Функція називається зростаючою на інтервалі (a, b)**,** якщо на цьому інтервалі при збільшенні аргументу збільшуються і її значення. Відповідно функція називається спадною на інтервалі (a, b), якщо при збільшенні аргументу її значення зменшується. Інакше, якщо на інтервалі (a, b) $f'(x) > 0$ то функція монотонно зростає (дотична має нахил вправо), а якщо $f'(x) < 0$,то монотонно спадає (дотична має нахил вліво)).

2. ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ.

Якщо функція в точці x_0 **змінює монотонність, то в цій точці вона має екстремум.** Таким чином, достатньою умовою існування екстремуму неперервної диференційованої функції є зміна знаку першої похідної при переході через точку.

Приклад. Знайдемо точки екстремуму функції $y = x^4 - 2x^2$.



$D(y) = R$. $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

Знайдемо корені похідної: $4x(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

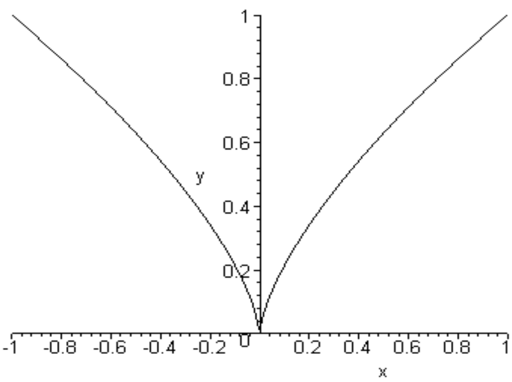
Знайдені точки є "підозрілими" на екстремум. Вони інколи називаються стаціонарними ($y' = 0$, дотична горизонтальна). Для зручності складемо таблицю:

x	$(-\infty; -1)$	**-1**	**(-1; 0)**	**0**	**(0; 1)**	**1**	$(1; +\infty)$
y'	–	**0**	+	**0**	–	**0**	+
y	↘	**-1**	↗	**0**	↘	**-1**	↗
		min		max		min	

За таблицею бачимо проміжки монотонності і точки екстремуму. Насправді можна було у цьому випадку обмежитись дослідженням на півосі, бо функція парна.

Однак в точці екстремуму неперервна функція може не мати похідної.

Приклад. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



Знайдемо похідну. $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. При $x_0=0$ похідна не існує (обертається на нескінченність). Тобто дотична вертикальна. Однак функція $f(x)$ в точці $x_0=0$ неперервна і, очевидно, має мінімум.

Функція в точці екстремуму може бути розривною тобто недиференційованою.

Тому необхідні умови існування екстремуму в точці у загальному вигляді можуть бути сформульовані так.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0. Тоді, якщо вона має екстремум в цій точці, то її похідна в цій точці $f'(x_0)$ або дорівнює нулю, **або не існує.**

3. ОПУКЛІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ, ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ.

Нехай функція $f(x)$ має похідну на інтервалі $(a,\, b)$. Тоді $f(x)$ називається опуклою вниз, якщо її графік лежить вище дотичної в будь-якій точці інтервалу $(a,\, b)$. Якщо він лежить нижче дотичної, то функція називається опуклою вгору.

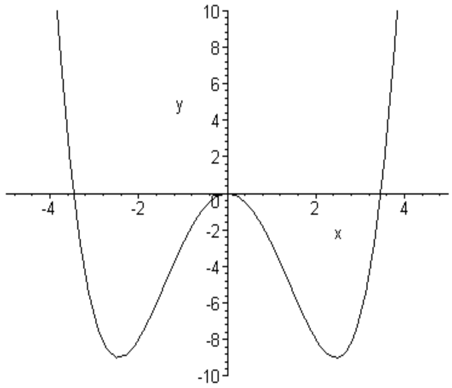
Точки, в яких функція змінює опуклість, називаються точками перегину, наприклад, точка C:

З ліва від точки C функція опукла вгору, а з права – вниз. Аналогічною ознакою опуклості є таке твердження: якщо друга похідна функції $f(x)$ на інтервалі $(a,\, b)$ додатна, тобто $f''(x)>0$, то функція опукла вниз. Це випливає з того, що додатність $f''(x)$ тягне за собою зростання $f'(x)$, а це означає, що при просуванні в право дотична обертається проти часової стрілки (і нахил зростає).

Якщо ж друга похідна від'ємна, $f''(x)<0$, то функція опукла вгору (нахил дотичної спадає).

Наявність точок перегину забезпечує зміна знаку другої похідної.

Приклад. Знайдемо проміжки опуклості і точки перегину функції $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$.



$\left(D(f) = R\right)$. $y' = x^3 - 6x$, $y'' = 3x^2 - 6 = 3\left(x^2 - 2\right)$.

Корені другої похідної: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Для зручності складемо таблицю

x	$\left(-\infty;\,-\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\left(-\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2};\,\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	-5 перегин	$\cap$	-5 перегин	$\cup$

Бачимо, що з ліва від точки $-\sqrt{2}$ і з права від $\sqrt{2}$ функція опукла вниз, а між цими точками – в гору. Точки $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ - точки перегину. (Тут знов-таки, за рахунок парності функції можна було обмежитись розглядом на півосі $(0;\,+\infty)$.

4. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ.

Пряма А називається асимптотою кривої, якщо відстань δ від змінної точки М кривої до цієї прямої при віддалені точки М у нескінченність прямує до нуля.

Асимптоти класифікуються на *вертикальні* та *похилі* (у тому числі горизонтальні).

Якщо виконується хоча б одна з умов:

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$.

Загальне рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$;

де $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

Для горизонтальної асимптоти $k = 0$**.**

5. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ.

Накопичених відомостей нам досить, щоб розглянути більш-менш повне дослідження функцій. Загальна схема дослідження (і побудови графіка) така:

1) знаходимо область означення функції $f(x)$. Якщо функція парна чи непарна, можна обмежитись розглядом на півосі. З’ясуємо наявність нескінченних розривів, тобто вертикальних асимптот.

2) розглядаємо поведінку функції при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$, а також знаходимо, якщо вони є, похилі асимптоти. Тут вже можна робити грубий ескіз графіка.

3) за допомогою першої похідної $f'(x)$ знаходять проміжки монотонності і точки екстремумів.

4) знаходять другу похідну $f''(x)$ і визначають проміжки опуклості і точки перегину.

До цього ще, якщо можливо, додають корені функції $\left(f(x) = 0\right)$ і бачимо ще кілька точок, наприклад, точку перегину графіка з віссю Oy $\left(0;\ f(0)\right)$.

Далі, поєднуючи усі відомості, уточнюють і малюють графік.

Приклад 1. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

1) $D(f) = R \setminus \{-1\}$. Точка $x = -1$ - точка нескінченного розриву. Тобто пряма $x = -1$ - вертикальна асимптота. Функція ні парна, ні непарна.

2) похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1; b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) = kx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

Є похила асимптота, рівняння якої $y = x - 1$.

Можна зробити "грубу прикидку" графіка. Враховуючи поведінку біля асимптот:

3) $f'(x) = \dfrac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$.

$f'(x) = 0$, $x^2 + 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

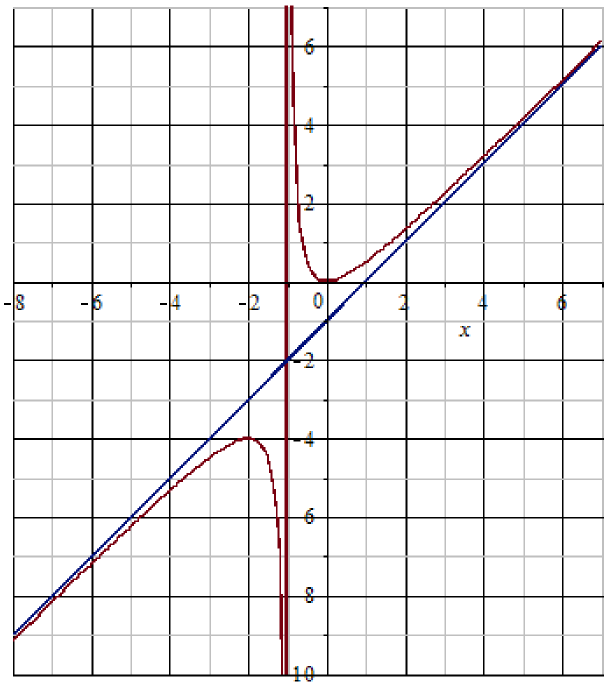
x	$(-\infty; -2)$	-2	(-2; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; ∞)
y'	+	0	—	Не існує	—	0	+
y	↗	-4	↘	Не існує	↘	0	↗
		max				min	

4) $f''(x) = \dfrac{(2x+2)(1+x)^2 - 2(1+x)(x^2+2x)}{(1+x)^{4\,3}} = \dfrac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(1+x)^3} = \dfrac{2}{(1+x)^3}$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -\infty)$
y''	—	не існує	+
y	$\cap$	не існує	$\cup$

Зазначимо, що хоча при переході через точку $x = -1$ опуклість змінюється, ця точка не вважається точкою перегину.

Зауважимо ще, що $f(0) = 0$ - єдиний корінь функції і в цій же точці графік перетинає вісь Oy. З урахуванням усіх обчислень графік набуває вигляду:



Приклад. $f(x) = xe^{-x}$.

1) $D(y) = R$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Бачимо, що вісь Ox є правою горизонтальною асимптотою графіка. Зробимо грубий ескіз (враховуючи $f(0) = 0$).

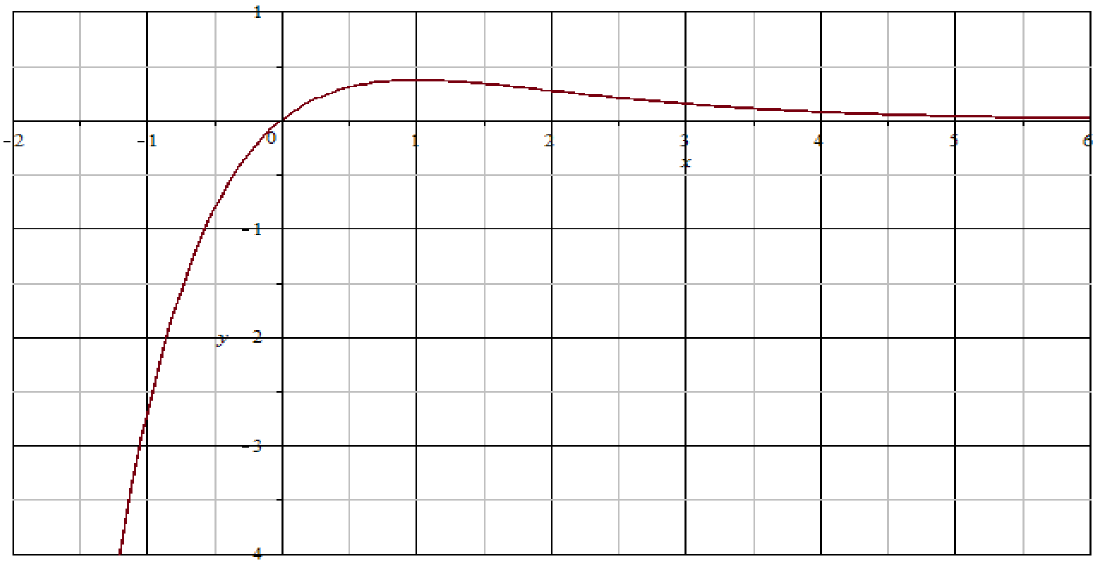
3) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. $y'(1) = 0$.

x	$(-\infty;\ -1)$	1	$(1;\ \infty)$
y'	+	0	—
y	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$ max	$\searrow$

4) $y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. $y''(2) = 0$.

x	$(-\infty;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
y''	—	0	+
y	$\cap$	$\dfrac{2}{e^2}$ перегин	$\cup$

Будуємо графік:



Для дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватись наступного алгоритму:

Перший етап (використання виду заданої функції):

1) знаходимо область визначення функції, точки розриву, інтервали неперервності;

2) досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність;

3) знаходимо асимптоти графіка функції;

4) знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат;

Другий етап (використання похідної першого порядку):

5) знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів та екстремальні значення функції.

Третій етап (використання похідної другого порядку):

6) знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перетину.

Четвертий етап:

7) згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат отримані точки, асимптоти і будуємо графік функції з урахуванням інтервалів неперервності, зростання та спадання, опуклості та угнутості, асимптот графіка.

Приклад. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання: Задана функція має розрив у точці $x=1$, тому $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ область неперервності цієї функції.

Задана функція не буде парною або непарною.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$.

Отже, пряма $x=1$ є вертикальна асимптота. Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Отже, похилих асимптот не має. Шукаємо горизонтальні асимптоти:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Тому пряма $\boldsymbol{y}=0$ буде горизонтальною асимптотою.

Тепер знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $\boldsymbol{x}=0$ маємо $\boldsymbol{y}=-1$; тобто точку $\boldsymbol{M}_0(0;\,-1)$; при $\boldsymbol{y}=0$ одержуємо $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}$, тобто точку $\boldsymbol{M}_1\left(\frac{1}{2};\,0\right)$.

Переходимо до другого етапу дослідження.

Похідна функції буде

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\frac{2(\boldsymbol{x}-1)^2-2(\boldsymbol{x}-1)(2\boldsymbol{x}-1)}{(\boldsymbol{x}-1)^4}=\frac{2(\boldsymbol{x}-1)-2(\boldsymbol{x}-1)}{(\boldsymbol{x}-1)^3}=\frac{2\boldsymbol{x}-2-4\boldsymbol{x}+2}{(\boldsymbol{x}-1)^3}=-\frac{2\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}-1)^3}.$$

Похідна не існує в точці $\boldsymbol{x}=1$ і дорівнює нулю при $\boldsymbol{x}=0$. Отже, критичною точкою першого роду буде лише точка $\boldsymbol{x}=0$ тому, що $\boldsymbol{x}=1$ не належить області визначення функції.

Складемо таблицю з урахуванням точки розриву та критичної точки.

Таблиця.

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty;\,0)$	$\boldsymbol{x}=0$	$(0;\,1)$	$\boldsymbol{x}=1$	$(1;\,\infty)$
$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$	–	0	+	не існує	–
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\searrow$	min	$\nearrow$	не існує	$\searrow$

Отже, на інтервалі $(0;\,1)$ функція зростає, а в інтервалах $(-\infty;\,0)$ та $(1;\,\infty)$ - спадає.

Екстремальним значенням функції буде

$$\boldsymbol{y}_{\min}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-1.$$

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину за відповідною схемою; друга похідна має вигляд:

$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})=\left(-\frac{2\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}-1)^3}\right)'=\frac{-2(\boldsymbol{x}-1)^3+2\boldsymbol{x}3(\boldsymbol{x}-1)^2}{(\boldsymbol{x}-1)^6}=\frac{-2(\boldsymbol{x}-1)+6\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}-1)^4}=\frac{4\boldsymbol{x}+2}{(\boldsymbol{x}-1)^4}.$$

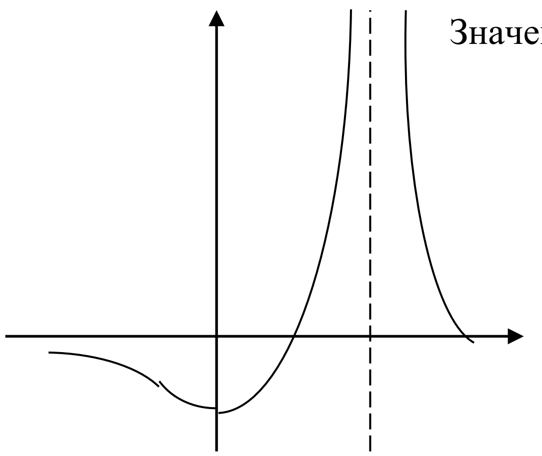
Звідси знайдемо критичні точки другого роду: $4\boldsymbol{x}+2=0$, $\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}$.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву та $\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}$.

Таблиця.

$\boldsymbol{x}$	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$	$\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$	$\boldsymbol{x}=1$	$(1;\ \infty)$
$f''(x)$	–	0	+	не існує	+
$f(x)$	$\cap$	точка перегину	$\cup$	не існує	$\cup$

Отже, на інтервалі $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$ графік функції опуклий, а в інтервалах $\left(-\frac{1}{2};\ 1\right)$ та $(1;\ \infty)$ графік угнутий.



Значення функції в точки перегину буде:

$$\boldsymbol{y}_{nap}=\boldsymbol{f}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}.$$

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції

Питання і вправи до самоконтролю

1. Сформулювати означення похідної функції в точці.
2. Який механічний зміст похідної?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Сформулювати означення диференційованої функції: а) в точці; б) в інтервалі $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$.

5. Чи буде: а) неперервна функція в точці диференційованою в цій точці; б) диференційована функція в точці неперервною в цій точці?

6. Чому дорівнює похідна степеневої функції?

7. Чому дорівнює похідна тригонометричних функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$?

8. Сформулювати необхідну умову існування екстремуму функції. Правило дослідження функції на екстремум.

9. Що називається найбільшим і найменшим значенням неперервної функції, заданої на замкненому відрізку? Правила знаходження найбільшого і найменшого значень функції.

10. Як знайти асимптоти графіка функції?

11. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка.

12. Знайти похідні першого порядку заданих функцій:

1) $y=(x+1)(x^3+3)$; 2) $u=\left(y+\frac{3}{2}\right)(y^2-5)$; 3) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$; 4) $y=\frac{t^2-7t}{t-5}$; 5) $f=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $y=x^2e^{-x}$; 7) $y=\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.

13. Знайти диференціали першого порядку функцій: 1) $y=\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$;

2) $y=\sin^3 2x$; 3) $y=3^{\cos x}$; 4) $y=\ln ctg\sqrt[3]{x}$;

14. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^3-7x+2}{x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\cos x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$;

15. Знайти максимуми та мінімуми функцій: 1) $f(x)=xe^{-x^2}$;

2) $y=2x^2-\frac{x^4}{4}$; 3) $f(x)=e^x\cos x$; 4) $f(x)=x\sqrt[3]{1-x}$.

16. Відшукати найбільші та найменші значення функцій на зазначених проміжках:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$ на $[-3;\,3]$;

2) $y=2x^3-15x^2+36x-18$ на $[1;\,3]$;

3) $y=2^x$ на $[-3;\,3]$.

17. Знайти проміжки опуклості, угнутості й точки перегину кривих:

1) $y=x^3-6x^2+2x+10$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 4) $y=x^2\ln x$.

18. Побудувати графіки функцій: 1) $y=\frac{1}{3}x^3-4x$; 2) $y=\frac{1}{x^2-1}$;

ТЕМА: ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Приклади розв'язку задач.

Приклад 1. Знайти область визначення функції: $U = \sqrt{25-(x+1)^2-(y-2)^2-z^2}$.

Розв'язання. Задана функція U залежить від трьох змінних x, y та z. Вона приймає певні дійсні значення лише при умові

$25-(x+1)^2-(y-2)^2-z^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2-(y-2)^2-z^2 \leq 25$.

Рівність $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ є рівнянням сфери з центром у точці $C(a,\, b,\, c)$ і радіусом R.

Отже, одержана нерівність означає, що областю визначення функції U буде куля радіуса 5 з центром в точці $C(-1;\, 2;\, 0)$. Нерівність нестрога, тому функція U визначена на сфері – межі цієї кулі.

Згідно з основними поняттями аналітичної геометрії, функція двох змінних у тривимірному просторі зображується деякою поверхнею. Кожна точка цієї поверхні M має координати $(x,\, y,\, z)$.

Областю визначення функції $z = f(x,\, y)$, буде деяка область площини xOy (рис.1)

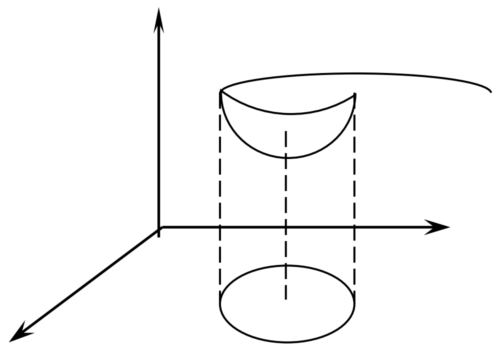


Рис.1

Приклад 2. Визначити лінії рівня функції $z=(x-2)^2+(y+3)^2$.

Розв'язання. Лінії рівня функції $z = f(x,\, y)$ мають рівняння $f(x,\, y)=C$ (C - стала), тобто $(x-2)^2+(y+3)^2=C$.

Якщо надати C різні числові значення (наприклад: $C=4$, $C=9$, $C=16$), то одержимо сукупність кіл з центром у точці $C(2;\, -3)$ з відповідними радіусами (наприклад, 2, 3, 4).

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ у точці $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $F(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$.

При $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ маємо: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 4$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 6$.

Отже, підставимо ці значення в рівняння дотичної площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Одержимо: $2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$

або $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Рівняння нормалі до площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \text{ або } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Приклад 4. Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції $u = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}z^3$ у точці $M_0(1;\ 0;\ 3)$.

Розв'язання. Напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x,\ y,\ z)$ співпадає з напрямом вектора (його називають градієнтом U)

$$\mathbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

а величина цієї найбільшої швидкості дорівнює довжині вектора, тобто:

$$|\mathbf{grad}\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Частинні похідні першого порядку в цьому випадку будуть:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = 14\boldsymbol{xy}\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} = 7\boldsymbol{x}^2 - 7\boldsymbol{yz}\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = 14\boldsymbol{z}^2 - \frac{7}{2}\boldsymbol{y}^2 .$$

Величину найбільшої швидкості зміни заданої функції $\boldsymbol{U}$ у будь-якій точці:

$$|\boldsymbol{grad\,u}| = \sqrt{(14\boldsymbol{xy})^2 + 7^2\left(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{yz}\right)^2 + \left(14\boldsymbol{z}^2 - \frac{7}{2}\boldsymbol{y}^2\right)^2} =$$

$$= 7\sqrt{4\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2 + \left(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{yz}\right)^2 + \left(2\boldsymbol{z}^2 - \frac{7}{2}\boldsymbol{y}^2\right)^2} .$$

Підставимо замість $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ координати точки $\boldsymbol{M}_0$, тоді:

$|\boldsymbol{grad\,u}(\boldsymbol{M}_0)| = 7 \cdot \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 0 + (1-0)^2 + 81 \cdot 4} = 7\sqrt{325} = 35\sqrt{13} \approx 35 \cdot 3.6 = 126$

(од.виміру).

Відповідь: 126 одиниць виміру.

*Приклад 5.*Знайти наближене значення функції $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^3$ у точці $\boldsymbol{M}_1(1.03;\ 1.97)$.

Розв'язання. Потрібне значення заданої функції знайдемо за формулою

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_0 + \Delta\boldsymbol{y}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0)\Delta\boldsymbol{y}$.

Нехай $\boldsymbol{M}_0(1;\ 2)$, тоді $\Delta\boldsymbol{x} = 0.03$, $\Delta\boldsymbol{y} = -0.03$.

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{M}_0) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^3 = 13 .$$

$$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{M}_0) = (2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y})\Big|_{(1;\ 2)} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 .$$

$$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{M}_0) = \left(2\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{y}^2\right)\Big|_{(1;\ 2)} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 14 .$$

Отже,

$$z(M_1)=z'(M_0)+z'_x(M_0)\Delta x+z'_y(M_0)\Delta y=13+6\cdot 0.03+14\cdot(-0.03)=$$

$$=13+0.18-0.42=12.76.$$

Відповідь: $z\approx 12.76$.

*Приклад 6.*Довести, що функція $z=xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $x\cdot z''_{xx}+y\cdot z''_{xy}=0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні заданої функції z, що входить до лівої частини рівняння:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)'_x=e^{\frac{y}{x}}+x\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}}=e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right).$$

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}=$$

$$=e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}+\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}};$$

$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}.$$

Підставимо знайдені z''_{xx} та z''_{xy} в ліву частину рівняння, тоді одержимо

$$x\cdot z''_{xx}+y\cdot z''_{xy}=\frac{y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}}-\frac{y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}}=0.$$

$$0\equiv 0$$

Отже, функція z задовольняє дане рівняння.

*Приклад 7.*Дослідити на екстремум функцію $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку заданої функції двох змінних:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Ці похідні існують для усіх x та y, тому критичними будуть лише точки, де частинні похідні дорівнюють нулю, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Остання система рівнянь лінійна, неоднорідна, з двома невідомими.

Розв'язавши її, наприклад, за правилом Крамера, одержимо:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6+2}{4-1} = -\frac{4}{3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Отже, критичною точкою буде $M_0\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Застосуємо достатню умову екстремуму $AC - B^2 > 0$ або

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right]^2 > 0:$$

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = z''_{xx}\Big|_{(x_0,\, y_0)} = 2;$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = z''_{yy}\Big|_{(x_0,\, y_0)} = 2;$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = z''_{xy}\Big|_{(x_0,\, y_0)} = -1.$$

Тому $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ та $A = 2 > 0$.

Отже, у точці $M_0\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ задана функція має мінімум:

$$z_{\min}=f\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-2\cdot\frac{1}{3}+1=$$

$$=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-4-\frac{2}{3}+1=-\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $z_{\min}=-\frac{4}{3}$.

Приклад 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2y(4-x-y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо критичні точки всередині області:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y);$$
$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y).$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}xy(8-3x-2y)=0\\ x^2(4-x-2y)=0\end{cases}.$$

Всередині області $x\neq 0$ та $y\neq 0$, тому

$$\begin{cases}3x+2y=8\\ x+2y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$$

У критичній точці $M_1(2;1)$ маємо $z(2;1)=4$.

Тепер проведемо дослідження функції на межі трикутника на прямій $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=6$ змінна $\boldsymbol{y}=6-\boldsymbol{x}$ і функція $\boldsymbol{z}$ приймає вигляд

$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2(6-\boldsymbol{x})\cdot(4-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}-6)=2\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{x}-6),\ \ \boldsymbol{x}\in[0;\,6].$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції однієї змінної $\boldsymbol{x}$ на замкненому відрізку $[0;\,6]$: $\boldsymbol{z}'=6\boldsymbol{x}^2-24\boldsymbol{x}$.

Із рівності $\boldsymbol{z}'=0$ знайдемо: $6\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-4)=0$, звідси випливає, що $\boldsymbol{x}_1=4$ та $\boldsymbol{x}_2=0$. Отже, $\boldsymbol{z}(4)=-64$; при $\boldsymbol{x}=0$ та $\boldsymbol{x}=6$ $\boldsymbol{z}(0)=0$, $\boldsymbol{z}(6)=0$.

На прямій $\boldsymbol{y}=0$ маємо $\boldsymbol{z}=0$.

Отже, задана функція $\boldsymbol{z}$ має найбільше значення в точці $\boldsymbol{M}_1(2;\,1)$ всередині області, найменше значення в точці $\boldsymbol{M}_2(4;\,2)$ на межі області.

Відповідь: найбільше значення функції $\boldsymbol{z}$ в заданому трикутнику $\boldsymbol{z}(2;\,1)=4$, найменше - $\boldsymbol{z}(4;\,2)=-64$.

Питання і вправи до самоконтролю

1. Як позначають та знаходять частинні похідні першого та вищого порядків, повний диференціал, повний приріст функції двох та трьох змінних?

2. Як формулюють та використовують необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?

3. Який мають вигляд і як формулюються достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?

4. Обчислити значення функції $\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{y}^2}$ при $\boldsymbol{x}=7$, $\boldsymbol{y}=-\sqrt{8}$.

5. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)$. Знайти $\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{2};\,0\right)$; $\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{4};\,\frac{\pi}{4}\right)$ та $\boldsymbol{f}\left(0;\,\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Знайти частинні похідні від функцій: 1) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}+1$;

2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^3\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^3+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+3$; 3) $\boldsymbol{z}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$; 4) $\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$;

7. Знайти усі похідні другого порядку функції: 1) $\boldsymbol{z}=\frac{2\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}+1}$;

2) $\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$; 3) $\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{y}^2$; 4) $\boldsymbol{z}=5\boldsymbol{x}^3+3\boldsymbol{y}^4+10$;

8. Знайти екстремуми функцій: 1) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2+9\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{y}+20$;

2) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}^{x-y}\left(\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{y}^2\right)$; 3) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}^{\frac{x}{2}}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2\right)$; 4) $\boldsymbol{u}=\frac{8}{\boldsymbol{x}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{y}$.

Навчальне видання

Говаленков Сергій Валентинович
Тарасенко Олександр Андрійович

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 2.

Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023 м. Харків, вул. Чернишевська, 94.