УДК 515.2

М.Н. Мурин, И.А. Чуб, М.В.Новожилова

[1] Университет гражданской защиты Украины, Харьков
[2] Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Предложены точные и приближенные методы и алгоритмическая реализация решения оптимизационной задачи размещения прямоугольных геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками.

***Ключевые слова**: оптимизация размещения, прямоугольные объекты с изменяемыми метрическими характеристиками.*

Введение

Постановка проблемы. Задачи оптимального размещения объектов различной физической природы обладают теоретической ценностью и имеют важное прикладное значение. Множество практических задач могут быть сформулированы и решены как задачи размещения. Однако, в подавляющем большинстве случаев рассматриваются задачи, в которых объекты размещения имеют фиксированные метрические характеристики и пространственную форму. Особый класс составляют задачи размещения объектов, метрические характеристики и пространственная форма которых может изменяться в процессе размещения и зависит от местоположения в области размещения. Оптимизационные задачи этого класса являются математическими моделями большого количества практических задач, встречающихся во многих областях человеческой деятельности.

К оптимизационным задачам размещения объектов с изменяемыми метрическими характеристиками и пространственной формой сводятся задачи энергосбережения, распределения ограниченных ресурсов проектов, календарного планирования, проектирования промышленных систем с источниками загрязняющих выбросов, размещения источников физических полей.

Несмотря на значительную практическую ценность, математический аппарат моделирования и решения таких задач разработан в недостаточной степени.

Анализ предыдущих исследований и публикаций. Задача прямоугольного размещения является базовой для целого семейства оптимизационных задач теории исследования операций [1 – 2], в частности, задач оптимального распределения ограниченных ресурсов проекта. Такие задачи рассматриваются как в однокритериальной, так и в многокритериальной постановках, при этом учитываются различные ограничения на размещение, диктуемые потребностями практических приложений [3 – 4]. Однако, как показывает анализ специальной научной литературы, класс задач прямоугольного размещения с изменяемыми метрическими характеристиками изучен в меньшей степени. Следует отметить ряд публикаций, посвященных этой тематике. В работах [5, 6] проведена формализация системы геометрических ограничений оптимизационной задачи размещения прямоугольных объектов с изменяемыми метрическими характеристиками. В работах [7 – 9] выделены конструктивные свойства области допустимых решений исходной оптимизационной задачи, на основании которых осуществлена линеаризации ограничений задачи.

Целью статьи является построение модифицированного точного и приближенного методов решения задачи на основе выделения дополнительных конструктивных свойств линеаризованной области допустимых решений и их алгоритмическая и программная реализация.

Изложение основного материала

Постановка задачи. Рассмотрим следующую оптимизационную 2D задачу прямоугольного размещения. Пусть имеется конечный набор T_i, $i = \overline{1, N}$, прямоугольных объектов размещения и прямоугольная область размещения Ω вида

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x \in [0, Z), y \in [0, W],$$
$$W = \text{const}, Z = \text{var}\}.$$

Положение объекта T_i в области Ω задается параметрами размещения (x_i, y_i), $i = \overline{1, N}$.

Метрические характеристики (a_i, b_i), $i = \overline{1, N}$ прямоугольных объектов размещения являются переменными, изменяющимися в диапазоне

$$a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}],$$
$$b_i \in [b_{i\min}, b_{i\max}], \qquad (1)$$
$$a_{i\min}, b_{i\min} > 0.$$

Пусть площадь S_i объекта T_i при изменении метрических характеристик остается неизменной:

$$S_i = a_{i\min} \times b_{i\max} = a_{i\max} \times b_{i\min},$$

то есть

$$b_i = S / a_i. \qquad (2)$$

Оптимизационная задача формулируется следующим образом:

необходимо разместить множество объектов размещения в области Ω без взаимных пересечений так, чтобы длина занятой части Z области Ω была минимальной, т.е. найти:

$$cu \to \min_{D \subset R^K}, \qquad (3)$$

где $u = (x_1, y_1, a_1, ..., x_N, y_N, a_N, Z)$; $c = (0, ..., 0, 1)$, K=(3N+1) – размерность задачи (3), D – область допустимых решений задачи, определяемая ограничениями вида

$$T_i \subset \Omega, \qquad (4)$$

$$\text{int } T_i(u_i) \cap \text{int } T_j(u_j) = \varnothing,\ i, j = \overline{1, N},\ i \neq j. \qquad (5)$$

Здесь ограничение (4) есть условие размещения объектов в области Ω, а условие (5) задает попарное взаимное непересечение объектов размещения.

Рассмотрим аналитическое описание ограничений (4) и (5).

Условие размещения объекта T_i, с учетом (1) в области Ω задается системой линейных и нелинейных неравенств

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \\ z - x_i - a_i \geq 0 \\ -y_i \geq 0 \\ W - y_i - \dfrac{S_i}{a_i} \geq 0 \\ -a_i + a_{i\max} \geq 0 \\ a_i - a_{i\min} \geq 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1, N}. \qquad (6)$$

Условие взаимного непересечения (5) с учетом (1) задается набором неравенств вида

$$\left\langle \begin{array}{l} x_j - x_i - a_i \geq 0 \\ y_j - y_i - S_i / a_i \geq 0 \\ x_i - x_j - a_j \geq 0 \\ y_i - y_j - S_j / a_j \geq 0 \end{array} \right., \quad i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \qquad (7)$$

Отметим основные свойства оптимизационной задачи (3), вытекающие из ее математической постановки.

Свойство D_1. Область D – невыпуклое, несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу $\Psi = \text{Fr} D$, $\Psi \subset R^{3N}$. Каждая компонента связности области допустимых решений D является многосвязной.

Свойство D_2. Функция цели задачи (3) линейна. Следовательно, оптимальная точка $u^* = \arg\min_{D \subset R^K} cu \in \Psi$.

Свойство D_3. Число ограничений 2N(N+2) на область D допустимых решений задачи (3), квадратично зависит от числа размещаемых объектов.

Свойство D_4. Функции вида $f(y_i, y_j, a_j) = y_i - y_j - \dfrac{S_j}{a_j}$ и $f(y_i, y_j, a_i) = y_j - y_i - \dfrac{S_i}{a_i}$ являются выпуклыми [7].

Свойство D_5. Область D допускает представление в виде объединения конечного числа выпуклых подобластей $D_g \subset R^K$ вида

$$D = \bigcup_{g=1}^{G} D_g, \quad G = O(4^K). \qquad (8)$$

При этом подобласть D_g описывается системой $F_g(u) \geq 0$ N систем нелинейных неравенств вида (6) и N(N-1)/2 неравенств – по одному из каждого набора неравенств вида (7).

Свойство D_6. Функции вида

$$f_1(y_i, y_j, a_i) = y_j - y_i - \frac{S_j}{a_i}$$

и

$$f_2(y_i, y_j, a_j) = y_i - y_j - \frac{S_j}{a_j}$$

принадлежат к классу сепарабельных [10].

Свойство D_7. Для точки u* имеет место соотношение $u^* \in \bigcap_{q>1} D_{gq}$.

Те ограничения задачи вида (6), (7), которые обращаются в текущей точке u (в том числе в оптимальной u*) в равенства, называют активным набором. Из свойства D_7 следует, что для рассматриваемой задачи характерным является то, что размерность J активного набора обычно больше величины K.

Свойство D_8. Оптимальное решение u* задачи определяется системой $F^*(u) = 0$ линейных и нелинейных уравнений активного набора. Ранг системы $F^*(u) = 0$ равен K.

Ограничения системы $F^*(u)=0$ называют рабочим списком [11].

Методы решения задачи (3). В силу свойств D_1, D_5 области допустимых решений, оптимизационная задача (3) является многоэкстремальной. Поэтому для ее решения в зависимости от ее размерности необходимо развивать как точные методы локальной и глобальной оптимизации, так и приближенные подходы. Рассмотрим подробнее эти группы методов.

Точные методы глобальной и локальной оптимизации. Согласно [12] существует теоретическая возможность определения глобального минимума функции цели оптимизационной задачи (3), (6), (7).

На основании свойства D_4 задача (3) принадлежит к классу задач комбинаторной нелинейной оптимизации. Общая идеология решения таких задач состоит в построении дерева решений A, для упорядочения полного перебора подмножеств области допустимых решений задачи, имеющих более простую структуру. На каждом таком подмножестве определяется локально-оптимальное решение задачи. Следовательно, данная задача сводится к усеченному перебору по дереву решений и решению конечного множества $\aleph=4^{N(N-1)}$ задач выпуклого программирования вида

$$cu \to \min_{D_g \subset R^K}, \tag{9}$$

каждая из которых формируется на соответствующей вершине дерева решений A.

Решение задачи (9) на системе $F_g(u) \ge 0$ является локальным минимумом задачи (3).

Приближенные методы решения задачи. Одним из наиболее интересных приближенных подходов является метод, основанный на оптимизации по группам переменных. Основные этапы метода таковы:

Этап 1. Определение рационального решения задачи на базе модифицированного метода оптимизации по группам переменных.

Этап 2. Перебор локальных экстремумов, основанный на переопределении порядка размещения объектов.

В данной работе будем считать, что способ задания последовательности размещения объектов, например, метод сужающихся окрестностей [13], генетический алгоритм [14] или реализация датчика случайных чисел, известен.

Общая схема этапа 1 метода оптимизации по группам переменных, такова [13]:

1.1 Объекты размещаются по одному согласно заданной последовательности номеров. Ранее размещенные объекты считаются неподвижными.

1.2 Размещение текущего объекта T_i производится с учетом требования минимизации длины занятой части области размещения.

Таким образом, на каждой i-й итерации метода оптимизации по группам переменных решается задача вида

$$\min_{(x_i, y_i, a_i) \in D_i} Z, \tag{10}$$

где область D_i – трехмерное сечение подобласти $\tilde{D} \subset R^{3i}$ допустимых решений D основной задачи при $x_l, y_l, a_l = \mathrm{const}$, $l=\overline{1, i-1}$; $x_i, y_i, a_i = \mathrm{var}$, область $\tilde{D}$ сформирована ограничениями (4), (5) для набора объектов $\{T_l\}, _{l=\overline{1,i}}$.

Линеаризация ограничений области D. В работе [6, 9] предложена методика глобальной линеаризации нелинейных ограничений оптимизационной задачи (3), (6), (7), позволяющая провести ее линейную аппроксимацию с любой заранее заданной точностью без увеличения размерности K пространства параметров R^K, которому принадлежит область допустимых решений задачи.

Рассматриваемое преобразование $D \xrightarrow{\Im} D^L$, $D^L \subset R^K$ состоит в замене нелинейных функций ограничений из (6) и (7) соответствующими линейными функциями.

Количество n звеньев аппроксимации зависит от точности аппроксимации ε:

$$\varepsilon = \max(d^n - d_k^n),$$

где d^n, d_k^n – коэффициенты уравнений секущей, соединяющей смежные узлы аппроксимации, и касательной к текущему сегменту нелинейной функции.

Выпуклость функций (свойство D_4) означает, что даже если точность ε аппроксимации такова, что есть необходимость их аппроксимации более чем одной линейной функцией, то линеаризованное описание данного участка границы $\Psi = \mathrm{Fr}D$ задается системой указанных линейных функций.

Таким образом, отображение $\Im$ при n=1 имеет вид:

$$\Im(a_i(y_i - y_j) + S_i) = \alpha \times a_i + \beta \times (y_i - y_j) - d_{ij}^n,$$

где $\alpha = A/\delta$, $\beta = B/\delta$,

$$d^n = d/\delta, \ \delta = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$A = b_{imax} - b_{imin}, \ B = a_{imax} - a_{imin},$$

$$d_{ij}^n = b_{imin}B - a_{imax}A.$$

Аппроксимация $\Im(W - y_i + S_i / a_i)$ функции ограничения (6) проводится аналогично.

Основные свойства отображения $\Im$ таковы.

Свойство $\Im\_1$. Вследствие проведения преобразования $D_g \xrightarrow{\Im} D_g^L$ выпуклая линейная подобласть D_g^L принадлежит тому же пространству, что и исходная подобласть D_g.

Свойство $\Im\_2$. Однократное применение данного преобразования при n=1 не увеличивает количества ограничений задачи. При этом линейная аппроксимация набора (6) нелинейных ограничений принимает вид

$$\left\langle \begin{array}{l} x_j - x_i - a_i \ge 0 \\ \alpha a_i + \beta \times (y_j - y_i) - d_{ji}^n \ge 0 \\ x_i - x_j - a_j \ge 0 \\ \alpha a_i + \beta (y_i - y_j) - d_{ij}^n \ge 0 \end{array} \right., \ i, j = \overline{1, N}, i \ne j. \quad (11)$$

Свойство $\Im\_3$. При многократном применении аппроксимирующих процедур количество ограничений увеличится, но число G подмножеств D_g останется таким же. Следовательно, характеристики дерева решений А, применяемого для упорядочения подмножеств D_g с целью получения глобально-оптимального решения, такие как количество уровней и количество вершин дерева, добавляемых на каждом его промежуточном уровне, остаются неизменными.

Модификация метода **локальной оптимизации линеаризованной задачи.** Линеаризованная задача на подмножестве D_g^L имеет вид:

$$cu \to \min_{D_g^L \subset R^K}, \quad (12)$$

где область D_g^L задается системой

$$F_g^L(u) \ge d^n$$

линейных ограничений.

Рассмотрим (m+1)-ю итерацию схемы активного набора [11] для решения оптимизационной задачи (12)

$$u^{m+1} = u^m + \Delta u^m \cdot p^m, \quad (13)$$

где u^m – значения переменных на предыдущей итерации; Δu^m – шаг, p^m – направление спуска.

В точке u^m определяются знаки компонент вектора множителей Лагранжа λ как решения соответствующей невырожденной системы линейных уравнений вида:

$$H^T \lambda = c, \quad (12)$$

где H^T – транспонированная матрица коэффициентов ограничений активного набора в рассматриваемой точке.

В силу особенностей вектора коэффициентов функции цели с вектор множителей Лагранжа λ есть К-й столбец матрицы H^T.

Если все компоненты $\lambda \ge 0$, то u^m есть решение задачи (12). Если некоторый $\lambda_s < 0$, то направление p^h определяется как решение линейной системы вида

$$Hp^m = e_s, \quad (15)$$

где e_s обозначен s-й столбец единичной матрицы, т.е. p – s-й столбец матрицы H^{-1} (s-я строка матрицы $(H^T)^{-1}$).

Для множества V всех неактивных на m-ой итерации метода ограничений задачи (10) вычисляется верхняя оценка $\overline{\alpha}$

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} \min\limits_{v} \dfrac{d_v^n - h_v^T u^m}{h_v^T p^m}, \\ \quad \text{если } h_v^T p^m < 0, \ v \in V, \\ +\infty, \\ \quad \text{если } h_v^T p^m \ge 0 \text{ для всех } v \in V \end{cases} \quad (16)$$

шага Δu^m, реализующего равенство

$$h_v^T (u^m + \overline{\alpha}^m p^m) = d_{ij}^n, \text{ г}$$

де v –индекс неактивного ограничения.

Реализация свойства D_8 означает, что вектор u^m может одновременно удовлетворять два ограничения набора (11), например, первое и второе. В таком случае в качестве неактивного ограничения выступает то, для которого оценка шага Δu^m больше.

Особенности поиска приближенного решения основной задачи в линеаризованной постановке. Задача (8) Этапа 1 метода оптимизации по группам переменных, имеет дискретно-континуальную природу, вследствие чего на каждой i-й итерации может быть представлена как конечный набор $\wp$ задач одномерной непрерывной оптимизации с эндогенным параметром a_i. Количество таких задач определяется числом вершин области $\tilde{D}$, которая очевидно, является невыпуклой.

Программная реализация методов решения. Разработанные методы поиска локально-оптимального и приближенного решения оптимизационных задач размещения прямоугольных объектов с изменяемыми метрическими характеристиками программно реализованы в среде визуального программирования Delphi 7.0, язык программирования Object Pascal 6.0.

Проведены численные эксперименты, в которых рассмотрено множество задач размещения наборов прямоугольников с разными метрическими характеристиками.

Получены оценки вычислительной сложности предложенных алгоритмов. Сравнение эмпирических оценок вычислительной сложности решения задач размещения прямоугольников с постоянными и изменяемыми метрическими характеристиками показало, что учет изменяемости метрических характеристик практически не влияет на оценку вычислительной сложности алгоритма решения.

Выводы и направления дальнейших исследований

Выделены дополнительные свойства области допустимых решений задачи размещения прямоугольников с изменяемыми метрическими характеристиками в исходной и линеаризованной постановках.

Рассмотрены, алгоритмически и программно реализованы точные и приближенные подходы к решению данного класса задач размещения.

Предложенное математическое, алгоритмическое и программное обеспечение является основой решения ряда важных прикладных задач управления ограниченными ресурсами проектов при учете дополнительных ограничений.

Список литературы

1. *Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Haußner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183. – P. 1109-1130.*
2. *Lodi A. Two–dimensional packing problems: a survey/ A. Lodi, S. Martello, M. Monaci // EJOR. – 2002. – Vol. 141. – P. 241-252.*
3. *Imahori S. Local search heuristics for the rectangle packing problem with general spatial costs / S. Imahori, M. Yaguira, T. Ibaraki // MIC'2001 – 2001. – P. 471-476.*
4. *Чуб І.А. Математична модель та розв'язок оптимізаційної задачі розподілу ресурсів проекту / І.А. Чуб, М.В. Новожилова, І.В. Беленченко // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2011. – Вип. 2 (92). – С. 291-294.*
5. *Чуб И.А. Формализация ограничений одной задачи распределения ресурсов проекта / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, М.Н. Мурин // Науковий вісник будівництва. – 2007. – Вип. 43. – С. 229-231.*
6. *Чуб І.А. Геометричне моделювання основних обмежень на параметри розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками / І.А. Чуб, М.В. Новожилова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2009. – Вип. 4, Т. 42. – С. 77-85.*
7. *Чуб И.А. Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, М.Н. Мурин // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 134-141.*
8. *Чуб І.А. Метод пошуку глобального мінімуму задач розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками / І.А. Чуб, М.М. Мурін // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2009. – Вип 25. – С. 119-125.*
9. *Чуб И.А. Построение линейной аппроксимации области допустимых решений задачи размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Мат. машини и системи. – 2010. – № 2. – С. 99-107.*
10. *Андронов С.А. Методы оптимального проектирования / С.А. Андронов. – СПб.: СПбГУАП, 2001. – 168 с.*
11. *Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.*
12. *Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К.: Наук, думка. 1988. – 472 с.*
13. *Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наук. думка, 1976. – 247 с.*
14. *Bortfeldt A. A genetic algorithm for the two–dimensional strip packing problem with rectangular pieces / A. Bortfeldt // EJOR. – 2006. – Vol. 172. – №3. – P. 814-837.*

Поступила в редколлегию 18.08.2012

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Д. Сизова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ЗІ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

М.М. Мурін, І.А. Чуб, М.В. Новожилова

Запропоновано точні та наближені методи та алгоритмічна реалізація розв'язання оптимізаційної задачі розміщення прямокутних геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

***Ключові слова:** оптимізація розміщення, прямокутні об'єкти із змінними метричними характеристиками.*

MATHEMATICAL SOFTWARE FOR SOLVING PROBLEM OF PLACEMENT OF RECTANGLES WITH VARIABLE METRIC CHARACTERISTICS

M.N. Murin, I.A. Chub, M.V. Novozhilova

Proposed exact and approximate methods and algorithmic implementation of solving optimization problem of placement of rectangles with variable metric characteristics.

***Keywords:** optimization placement, rectangular shapes with variable metric characteristics.*