

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ БАГАТОЛАНКОВОГО МАЯТНИКА У НЕВАГОМОСТІ

Куценко Л.М.

д.т.н., професор,

Запольський Л.Л.

к.т.н., ст.н.сп,

*Національний університет цивільного захисту України,
м. Харків, Україна*

A GEOMETRICAL DESIGN OF VIBRATIONS OF MULTIPLE PENDULUMS IS IN A WEIGHTLESSNESS

Kutsenko L.N.

Doctor of Technical Sciences, professor,

Zapolsky L.L.

Candidate of Technical Sciences

National university of civil defence of Ukraine, Kharkov, Ukraine

Анотація

У статті розглянуто спосіб визначення у часі взаємного положення елементів багатоланкового маятника при коливаннях у межах площини у невагомості. При цьому опис коливання маятника виконано на основі рівнянь Лагранжа другого роду за умови відсутності дисипативних сил. Обговорюється можливість застосування способу для технології розгортання елементів орбітальних конструкцій (антен) в умовах невагомості.

Abstract

In the article the method of determination in time of mutual position of elements of iterative pendulum is considered at vibrations within the limits of plane in a weightlessness. Thus description of swing of the pendulum is executed on the basis of equalizations of Lagrange the second kind on condition of absence of dissipative forces. Possibility of application of method comes into question for technology of development of elements of orbital constructions (aerials) in the conditions of weightlessness.

Ключові слова: геометричне моделювання, коливання маятника, невагомість, рівняння Лагранжа другого роду, розгортання антени.

Keywords: geometrical design, swing of the pendulum, weightlessness, equalization of Lagrange the second kind, development of aerial.

У 1788 році Лагранж застосував варіаційний принцип до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням їх кінематичних зв'язків, використовуючи поняття кінетичної й потенціальної енергії механічної системи. У результаті Лагранж одержав універсальний підхід для опису руху будь-

якої механічної системи у вигляді рівнянь руху, відомих як рівняння Лагранжа другого роду. У роботі [1] розглянуто можливість застосування рівнянь Лагранжа другого роду за умови відсутності сили гравітації (тобто у разі невагомості), і, як наслідок, «нульової» потенціальної енергії механічної системи. Тому актуальним буде питання реалізації цієї ідеї на практиці.

Як приклад механічної системи розглянемо n -ланковий маятник [2], складений з невагомих нерозтяжних стержнів довжин L_i ($i=1..n$), і шарнірно сполучених між собою прикінцевими вузловими точками, на яких закріплено кулі з масами m_i ($i = 1..n$). Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_i(t)$ ($i = 1..n$), утворені відповідними ланками з вертикалями (рис. 1). Для спрощення вважатимемо, що тертя руху відсутнє, а точка кріплення нерухома в системі координат площини.

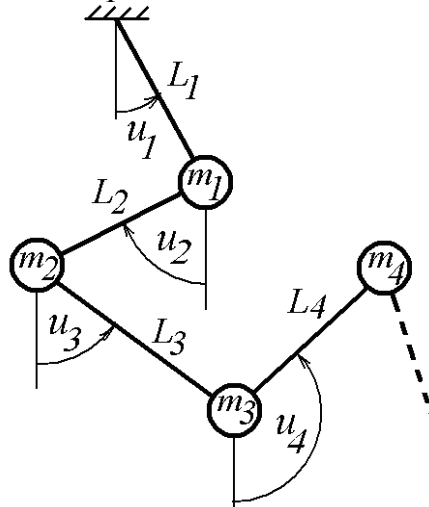


Рисунок 1. Схема n -ланкового маятника

Опис коливання маятника в площині за умови відсутності дисипативних сил виконаємо на основі рівнянь Лагранжа другого роду [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u'_i} L \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} (L) = 0, \quad (i = 1..n), \quad (1)$$

де $L = K(n) - P(n)$ - лагранжіан; $K(n)$ - кінетична енергія системи; $P(n)$ - потенціальна енергія системи; $u_i(t)$ - i -та узагальнена координата (кут між вертикаллю і ланкою); $u'_i = \frac{d}{dt} u_i(t)$.

Для обчислення кінетичної та потенціальної енергії маємо вирази [2, 3]:

$$K(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left[\left(-\sum_{i=1}^{k-1} L_i \cos(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \cos(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} -L_i \sin(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \sin(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 \right]; \quad (2)$$

$$P(n) = g \sum_{k=1}^n m_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} L_i \cos(u_i(t)) + L_k \cos(u_k(t)) \right). \quad (3)$$

У результаті опис руху n -ланкового маятника одержимо у вигляді системи з n диференціальних рівнянь відносно кутів $u_i(t)$ ($i=1..n$), складених за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду (1). У випадку коливання маятника у невагомості необхідно прийняти $P(n)=0$ [1].

В даній статті запропоновано спосіб визначення у часі взаємного положення елементів багатоланкового маятника за умови його коливання у невагомості у межах площини. Обговорено можливість застосування способу для розрахунку технології розгортання елементів стержневих конструкцій (наприклад, антен) в умовах невагомості.

Для прикладу розглянемо чотириланковий маятник ($n=4$). При розв'язанні рівнянь Лагранжа другого роду слід враховувати такі параметри [3] (далі всі значення параметрів в умовних величинах):

- вектор довжин ланок маятника: $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$;

- вектор значень мас куль: $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$.

При розв'язанні системи рівнянь слід враховувати початкові умови:

- вектор початкових кутів відхилень: $\boldsymbol{\theta} = \{u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0)\}$.

- вектор початкових швидкостей, наданих кутам відхилень:

$\boldsymbol{\theta}' = \{u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$.

В якості прикладу впровадженень «негравітаційних» маятників наведемо технологію розгортання доставлених на орбіту у вигляді касет конструкцій в умовах невагомості. Для цього початкове положення ланок маятника звичайно обирається у компактному вигляді касети (наочно це нагадує вигляд побутового метра у складеному стані): $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$, а також необхідно задати значення координат векторів \mathbf{L} і \mathbf{m} . Крім того вважається, що нерухома точка маятника прикріплена до тіла, маса якого незмірно більша порівняно з масами куль у вузлових точках.

Ініціювати коливання маятника у невагомості будемо шляхом вибору координат вектора початкових швидкостей, наданих кутам відхилень. Наприклад, $\boldsymbol{\theta}' = \{0, A, 0, 0\}$ означає, що тільки кулі № 2 масою m_2 надано початкову швидкість величиною A умовних одиниць. Для розгортання конструкцій в площині при невагомості такий підхід має певні переваги. Адже використовуючи (теоретично) лише один реактивний двигун можна забезпечити певну прогнозовану геометричну форму ланкам маятника. Далі для прикладу розглянуто «зіркові» конструкції з шести чотириланкових маятників зі спільним вузлом кріплення, кути між якими мають значення $\pi/3$.

Для розрахунку положень елементів маятника було складено програму у середовищі Maple. При цьому вираз лагранжіана співпадає з описом кінетичної енергії (тут і далі збережено синтаксис мови Maple):

$$\begin{aligned}
L := & \frac{1}{2} m_3 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_4^2 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_4 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 L_3^2 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_3^2 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + m_3 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
& + m_3 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
& + m_3 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
& + m_2 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
& + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
& + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_1(t) - u_4(t)) \\
& + m_4 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
& + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
& + m_4 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_2(t) - u_4(t)) \\
& + m_4 L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_3(t) - u_4(t))
\end{aligned}$$

За допомогою лагранжіана за формулою (1) утворимо систему з чотирьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно чотирьох функцій $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$. Складену систему рівнянь розв'яжемо наближено методом Рунге-Кутти, і одержані розв'язки позначимо як **solu1(t)**, **solu2(t)**, **solu3(t)** і **solu4(t)**.

З використанням одержаних розв'язків побудуємо зображення взаємного положення елементів маятників за допомогою таких операторів мови maple:

```

for i from 0 to N do
uu1 := solu1(T*i/N):
x1 := L1*sin(uu1):
y1 := -L1*cos(uu1):
pen1 := line([0,0], [x1, y1], color=blue, thickness=5);

```

```

uu2 := solu2(T*i/N):
x2 := x1 + L2*sin(uu2):
y2 := y1 - L2*cos(uu2):
pen2 := line([x2,y2], [x1, y1], color=blue, thickness=5);

```

```

uu3 := solu3(T*i/N):
x3 := x2 + L3*sin(uu3):
y3 := y2 - L3*cos(uu3):
pen3 := line([x2,y2], [x3, y3], color=blue, thickness=5);

```

```

uu4 := solu4(T*i/N):
x4 := x3 + L4*sin(uu4):
y4 := y3 - L4*cos(uu4):
pen4 := line([x4,y4], [x3, y3], color=blue, thickness=5);

```

```

str:=cat( " u1 = ", convert(evalf(uu1,5),string),
" u2 = ", convert(evalf(uu2,5),string),
" u3 = ", convert(evalf(uu3,5),string),
" u4 = ", convert(evalf(uu4,5),string));

```

```

OO := disk([0,0], 0.4, color=green):
A1 := disk([x1,y1], 0.4*m1, color=red):
A2 := disk([x2,y2], 0.4*m2, color=red):
A3 := disk([x3,y3], 0.4*m3, color=red):
A4 := disk([x4,y4], 0.4*m4, color=red):

```

```

Gr1[i] := display(pen1,pen2,pen3,pen4,OO,A1,A2,A3,A4,
scaling=CONSTRAINED, title=str):
end do:

```

Тут через T позначено інтервал часу інтегрування системи диференціальних рівнянь, а через N – кількість миттєвих положень в процесі коливання маятника. Остаточні побудови геометричної моделі «розгортання» конструкції здійснюємо за допомогою операторів

```

G1:= display(seq(Gr1[i],i=0..N)):
G2:= rotate(display(seq(Gr1[i],i=0..N)), 1*Pi/3):
G3:= rotate(display(seq(Gr1[i],i=0..N)), 2*Pi/3):
G4:= rotate(display(seq(Gr1[i],i=0..N)), 3*Pi/3):
G5:= rotate(display(seq(Gr1[i],i=0..N)), 4*Pi/3):
G6:= rotate(display(seq(Gr1[i],i=0..N)), 5*Pi/3):
display(G1, G2, G3, G4, G5, G6,
scaling=CONSTRAINED,axes=NONE,insequence=true);

```

В результаті виконання програми одержимо послідовність анімаційних зображень залежно від часу процесу «розгортання» конструкції. Одночасно будуть видаватися значення поточних величин кутів.

Приклад 1. Нехай $\mathbf{L} = \{1, 3, 3, 5\}$ і $\mathbf{m} = \{1, 1, 1, 1\}$ та початкові умови $\theta = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\theta' = \{0, 5, 0, 0\}$. На рис. 2 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.

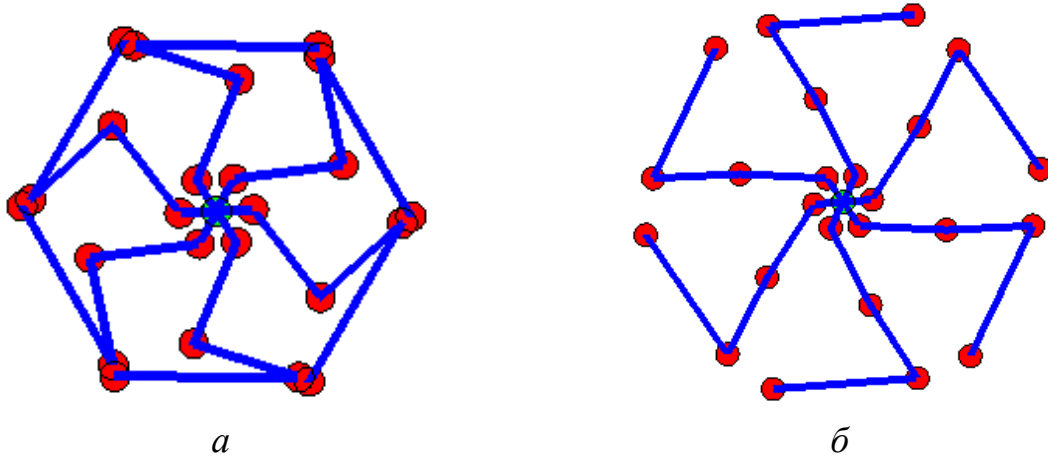


Рисунок 2. Зображення конструкцій для прикладу 1:

- а) $u_1=0,56822$; $u_2=0,39626$; $u_3=1,2615$; $u_4= -1,5755$
 б) $u_1=-0,44305$; $u_2=0,47496$; $u_3=0,572$; $u_4= -1,4954$

Приклад 2. Нехай $\mathbf{L} = \{5, 3, 3, 5\}$ і $\mathbf{m} = \{1, 1, 1, 1\}$ та початкові умови $\theta = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\theta' = \{0, 5, 0, 0\}$. На рис. 3 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.

Приклад 3. Нехай $\mathbf{L} = \{3, 3, 3, 3\}$ і $\mathbf{m} = \{1, 1, 1, 1\}$ та початкові умови $\theta = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$; $\theta' = \{0, 0, 5, 0\}$. На рис. 4 наведено одержані зображення конструкцій та значення кутів, які характеризують положення ланок маятника.

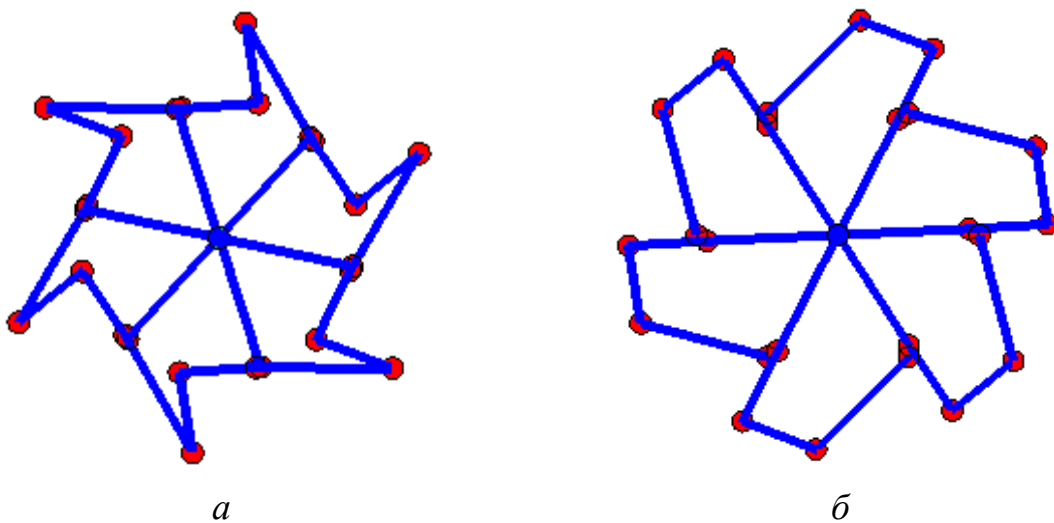


Рисунок 3. Зображення конструкцій для прикладу 2:

а) $u_1=1,3605$; $u_2=-0,45295$; $u_3=1,2070$; $u_4=-1,5763$;
 б) $u_1=-0,47715$; $u_2=-0,46324$; $u_3=1,2053$; $u_4=2,3583$

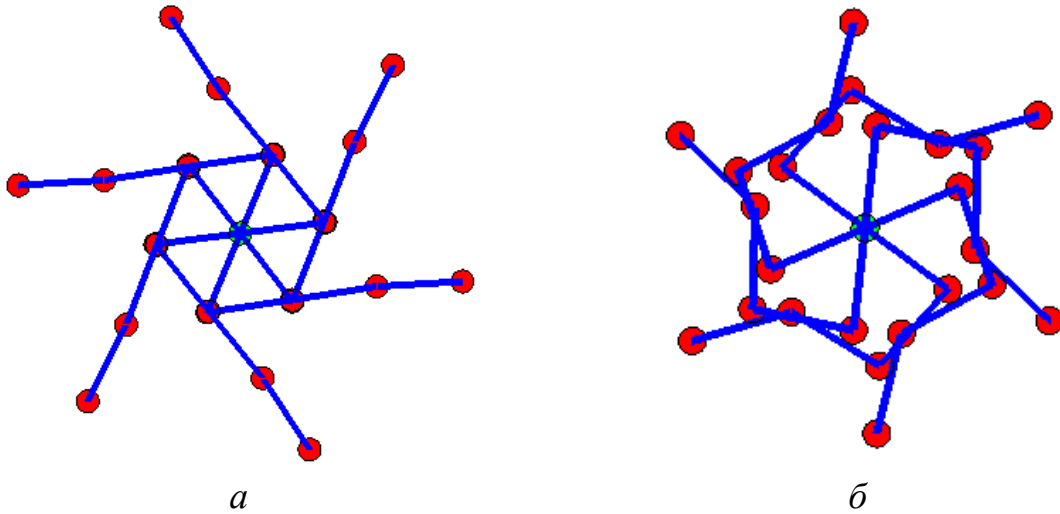


Рисунок 4. Зображення конструкцій для прикладу 3:

а) $u_1=1,6991$; $u_2=-2,4712$; $u_3=3,8223$; $u_4=-2,5591$
 б) $u_1=5,1226$; $u_2=-2,8241$; $u_3=2,0679$; $u_4=-3,3807$

Отже, пошук розв'язків здійснювався за допомогою складеної програми побудови анімаційних зображень залежно від часу «розгортання» конструкції. Прийнятний для впровадження конструкції момент фіксувався візуально, і для нього виводилися значення кутів, які характеризують положення ланок маятника. В разі досягнення прийнятного положення ланок слід передбачити їх фіксування «контактом» між відповідними кулями.

Наведений спосіб дозволяє визначити в часі взаємне положення на площині ланок багатоланкового маятника за умови відсутності гравітації. Одержані результати орієнтовані на перспективних розвиток технологій розгортання конструкцій в умовах невагомості.

Список літератури

1. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity. Інтернет ресурс. Режим доступу: http://www.cmsim.eu/papers_pdf/january_2014_papers/7_CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf
2. Gmiterko A., Grossman M. N-link Inverted Pendulum Modeling. Recent Advances in Mechatronics 2010, Part 3, p. 151-156.
3. Mart.inez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for n pendulums using Maple. Інтернет ресурс. Режим доступу: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>
4. Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятникових механічних систем. Автореф. дис... канд. техн. наук:

05.01.01/ *І.Ю. Адашевська* - Київський національний університет будівництва і архітектури – Київ, 2006. –20 с.

5. *Куценко Л.М.* Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятників. / *Л.М.Куценко, І.Ю. Адашевська* – Харків: «НТМТ», 2008.– 176с.

6. *Куценко Л.М.* Моделювання взаємних положень ланок маятника за умови відсутності гравітації / *Л.М.Куценко, І.Ю. Адашевська* – Сучасні проблеми моделювання: збірник наукових праць / МДПУ ім.. Б.Хмельницького. Мелітополь: Видавн. МДПУ ім.. Б.Хмельницького, 2017.– вип.. 9. -С. 85-89

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАКАЗОВ НА УТИЛИЗАЦИЮ ОТХОДОВ ШИН

Мустафин Т.

студент, МУИТ

Казахстан, Алматы

Мустафин С.

к.т.н., ИИВТ

Казахстан, Алматы

THE TASK OF PLACING ORDERS FOR WASTE MANAGEMENT

Mustafin T.

Student, MUIT

Kazakhstan, Almaty

Mustafin S.

Chief Researcher, IIST

Kazakhstan, Almaty

Аннотация

Цель работы - разработка и реализация математической модели для оптимального распределения заказов между заводами переработки для выработки практических рекомендаций по повышению эффективности переработки, утилизации и перевозки отходов промышленности.

Abstract

The aim of this work - the development and implementation of mathematical model for the optimal distribution of orders among factories processing for developing practical recommendations to improve efficiency, recycling and waste transportation industry.

Ключевые слова: резинотехнические отходы, математическая модель, распределение отходов, перерабатывающие заводы