

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ НЕПЕРЕТИНАННЯ ЕЛІПСІВ

Комяк В.М., д.т.н., професор

Соболь О.М., д.т.н., с.н.с.

Данилин О.М.

*Національний університет цивільного захисту України,
(Україна, м. Харків)*

Постановка проблеми. Задачі упаковки та розкрою (Cutting & Packing), зокрема задачі оптимальної упаковки еліпсів, які називаються також задачами оптимального розміщення, є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв'язання – напрямком теорії дослідження операцій. Цей клас задач має широкий спектр наукових і практичних застосувань в порошковій металургії, гірничодобувній промисловості для моделювання руху сипучих речовин, аналізі структур рідин та скла, задачах логістики для моделювання оптимальних упаковок вантажів, що мають форму еліптичного циліндра, в задачах евакуації людей з будівель при моделюванні індивідуально-поточного руху людей, проекції яких апроксимуються еліпсами.

Широкий спектр наукових і практичних застосувань, деякі з яких викладені вище, потребує розробки ефективних алгоритмів, що засновані на застосуванні методів локальної оптимізації великої кількості еліпсів. У зв'язку з цим, виникає необхідність у розробці ефективних, з точки зору складності, підходів до геометричного моделювання умов неперетинання еліпсів, які допускають неперервні трансляції, обертання та включення їх в область.

Аналіз останніх досягнень та публікацій. Як ефективний засіб геометричного моделювання відносин неперетинання пари еліпсів з урахуванням допустимих відстаней використовуються функції з класу ρ -функцій, що запропоновані в роботах Стояна Ю.Г [1,2]. В роботах [3,4] для побудови умов неперетинання еліпсів використовується апроксимація еліпсів у вигляді об'єднання п'яти базових об'єктів: пари кругів, пари сегментів кругів, прямокутника [3] або апроксимація дугами кіл [4]. Огляд публікацій з цієї тематики дає можливість зробити висновок про те, що тільки у роботі [5] викладається метод розв'язання задачі упаковки справжніх еліпсів (без апроксимацій), що припускають обертання, з використанням сучасних NLP solvers, доступних в GAMS. У цій статті наводиться досить повний огляд літератури, присвячений задачам упаковки еліпсів. В [5] отримано глобальний розв'язок для невеликої кількості еліпсів, однак при $N > 14$ авторам не вдалося отримати допустимого рішення. У зв'язку з цим, автори пропонують евристичний polyhedral-алгоритм для розміщення більшої кількості еліпсів (до 100) в прямокутній області

фіксованої ширини і змінної довжини. Задача оптимальної упаковки еліпсів, що допускають неперервні обертання, розглянута в [6]. Для аналітичного опису основних обмежень розміщення використовуються квазі-phi-функції [2]. Підхід, що викладений в роботах [6], дозволяє представити задачу оптимальної упаковки еліпсів з урахуванням допустимих відстаней у вигляді задачі нелінійного програмування і отримувати локально-оптимальні рішення при $N < 120$ (N – кількість об'єктів розміщення).

Тому виникла необхідність в розробці ефективних підходів до геометричного моделювання умов неперетинання еліпсів, які б дозволили розв'язувати практичні задачі більшої розмірності.

Метою дослідження є розробка ефективних алгоритмів моделювання умов взаємодії між еліпсами (неперетинання, торкання, перетинання).

Постановка задачі та її розв'язок. Розглянемо еліпси $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$, центри яких задані у власних системах координат. Нехай центри еліпсів $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$ знаходяться у точках $v_{E_i}(x_{E_i}, y_{E_i})$, $v_{E_j}(x_{E_j}, y_{E_j})$, причому еліпси повернені на кути $\theta_{E_i}, \theta_{E_j}$ відповідно. Еліпси $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ задані великими піввісями a_{E_i}, a_{E_j} і малими піввісями b_{E_i}, b_{E_j} відповідно. Між еліпсами E_i та E_j можуть бути задані обмеження на мінімально допустимі відстані r_{ij} , а між еліпсом E_i та границею області Ω – обмеження на мінімально допустимі відстані r_i . Необхідно здійснити геометричне моделювання умов неперетинання еліпсів з вивченням їх властивостей для розробки ефективних алгоритмів їх моделювання.

Згідно з визначенням, phi-функцією для об'єктів $E_i(u_{E_i})$ та $E_j(u_{E_j})$ [1] називається неперервна всюди визначена функція $\Phi^{E_i E_j}(u_{E_i}, u_{E_j}): R^6 \rightarrow R^1$, для якої виконується наступна важлива властивість: якщо $\Phi^{E_i E_j}(u_{E_i}, u_{E_j}) \geq 0$, то $\text{int } E_i(u_{E_i}) \cap \text{int } E_j(u_{E_j}) = \emptyset$.

$\Phi^{E_i E_j}(u_{E_i}, u_{E_j})$ задається у просторі R^6 .

Розглянемо метод геометричного моделювання перерізів поверхні дотику двох орієнтованих та неорієнтованих еліпсів. Загальна структура зазначеного методу є такою.

Якщо центри еліпсів $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$ знаходяться у точках $v_{E_i}(0,0)$, $v_{E_j}(x_{E_j}, y_{E_j})$, та еліпси є орієнтованими, тобто $\theta_{E_i} = \text{const}$, $\theta_{E_j} = \text{const}$ та $r_{ij}=0$, то $\Phi^{E_i E_j}(u_{E_i}, u_{E_j})$ буде задана у просторі R^2 і являє собою переріз поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів $E_i(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$. Для цього параметри розміщення $E_i(0,0,0)$ фіксуються, а інший об'єкт залишається рухомим (рис.1).

Розглянемо побудову перерізів поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів $E_i(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$. Для цього здійснюється завдання параметра дискретизації n_d кута повороту θ_{E_j} власної системи координат рухомого об'єкта. Значення параметра дискретизації визначає кількість перерізів поверхні дотику двох заданих еліпсів. Для кожного $\theta_{E_j, d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, $n_d > 0$, відбувається побудова перерізу поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$, причому кожен переріз являє собою замкнений контур.

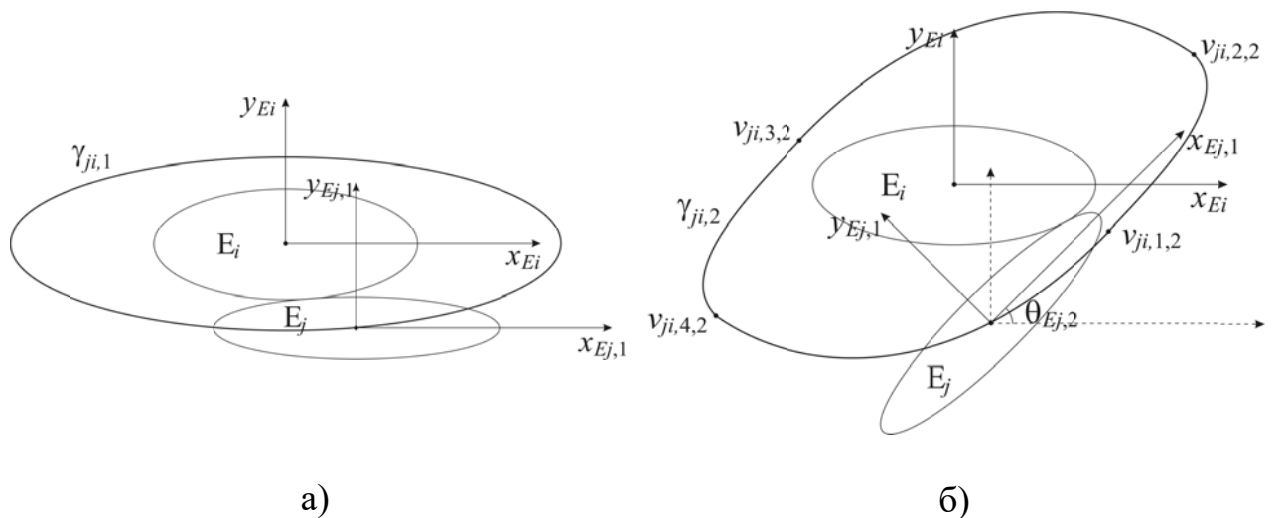


Рис. 1. Побудова перерізів поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$

Як було сказано вище, на рис. 1 наведено приклад побудови перерізів $\gamma_{ji,1}$ та $\gamma_{ji,2}$ поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$ для відповідних значень кутів повороту $\theta_{E_j,1}$ і $\theta_{E_j,2}$ локальної системи координат рухомого об'єкта $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та нерухомого $E_i(0,0,0)$. Аналогічно здійснюється побудова інших перерізів для кутів повороту $\theta_{E_j, d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$ локальної системи координат рухомого об'єкта.

Остаточню здійснюється формування множини перерізів $\gamma_{ji, d+1}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів. Так, на рис. 2 наведено множину перерізів поверхні дотику об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$ при $n_d = 8$.

Дана множина перерізів являє собою геометричну інтерпретацію умов

неперетинання неорієнтованих еліпсів, обертання яких здійснюється дискретно.

Розглянемо випадок, коли кути $\theta_{E_i}, \theta_{E_j}$ змінюються неперервно. Нехай задано у якості об'єктів $S_i(u_{S_i})$ і $S_j(u_{S_j})$ гомотетичні еліпси $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$, тобто $a_j = \lambda a_i, b_j = \lambda b_i$, λ – коефіцієнт гомотетії. Слід відзначити, що центр еліпса $E_i(u_{E_i})$, $v_{E_i} = (0,0)$ збігається з початком координат, а центр еліпса $E_j(u_{E_j})$ знаходиться у точці $v_{E_j} = (x_{E_j}, y_{E_j})$.

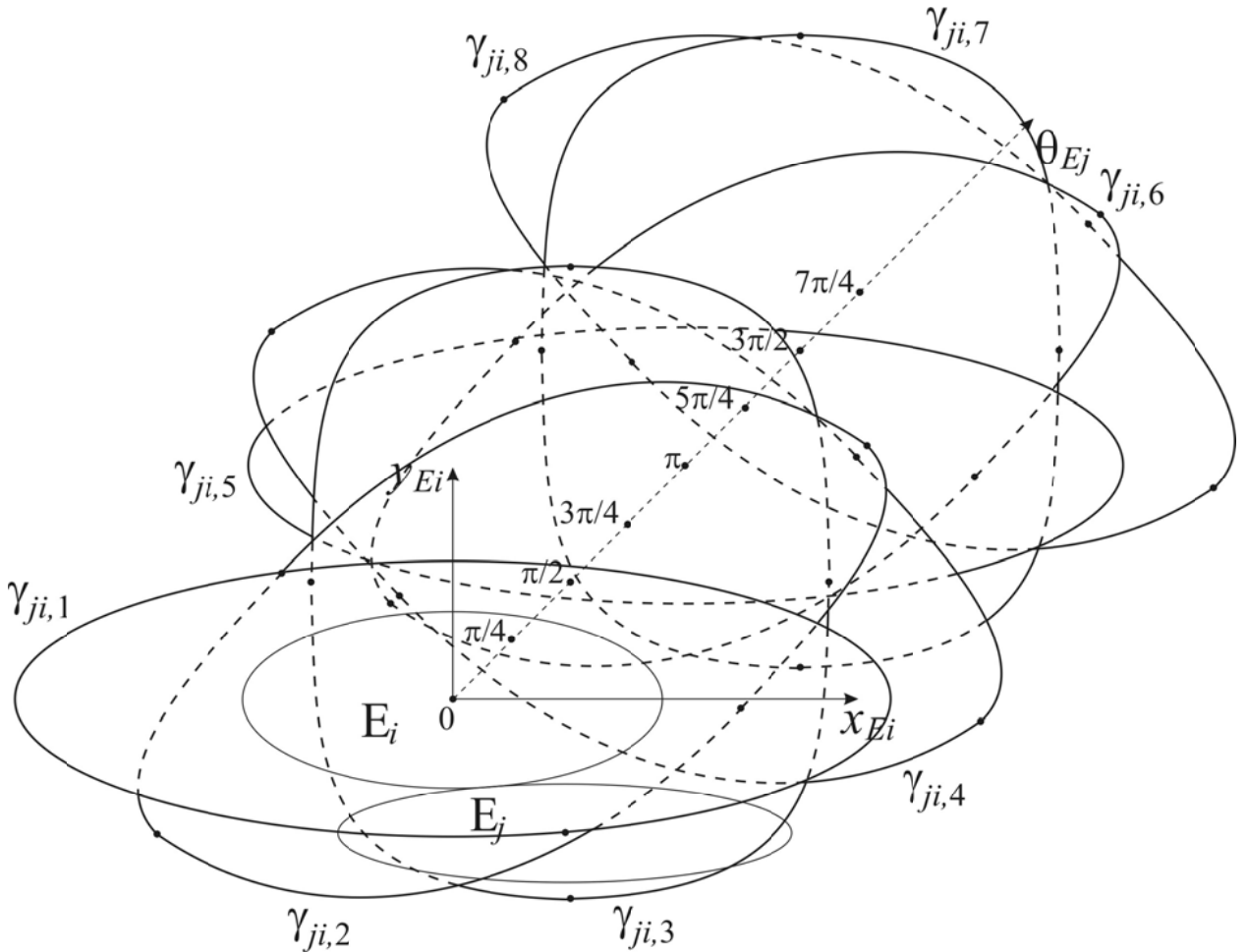


Рис. 2. Множина перерізів $\gamma_{ji,d+1}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, поверхні дотику двох неорієнтованих еліпсів для $n_d = 8$

Тоді ϕ -функція для пари еліпсів $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ набуде вигляду [3]:

$$\Phi^{E_i E_j}(v_{E_i}, v_{E_j}, \theta) = \frac{(x'_{E_j} - x'_{E_i})^2}{(a_{E_i} + a_{E_j})^2} + \frac{(y'_{E_j} - y'_{E_i})^2}{(b_{E_i} + b_{E_j})^2} - 1,$$

де $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ – еліпси, які задані у власних системах координат і обернені на однаковий кут $\theta_{E_i} = \theta_{E_j} = \theta$, тобто $x'_{E_i} = x_{E_i} \cos \theta + y_{E_i} \sin \theta$, $y'_{E_i} = -x_{E_i} \sin \theta + y_{E_i} \cos \theta$; $x'_{E_j} = x_{E_j} \cos \theta + y_{E_j} \sin \theta$, $y'_{E_j} = -x_{E_j} \sin \theta + y_{E_j} \cos \theta$.

Розглянемо випадок, коли $\theta_{E_i} \neq \theta_{E_j}$.

В роботі [7] доведено таке твердження.

Твердження 1. Якщо опуклі об'єкти (еліпси) не перетинаються, то існує така пряма L_{ij}^\perp , яка проходить через центр системи координат таким чином, що проекції об'єктів на дану пряму не перетинаються.

Нехай еліпси $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ не мають спільних внутрішніх точок (рис. 3).

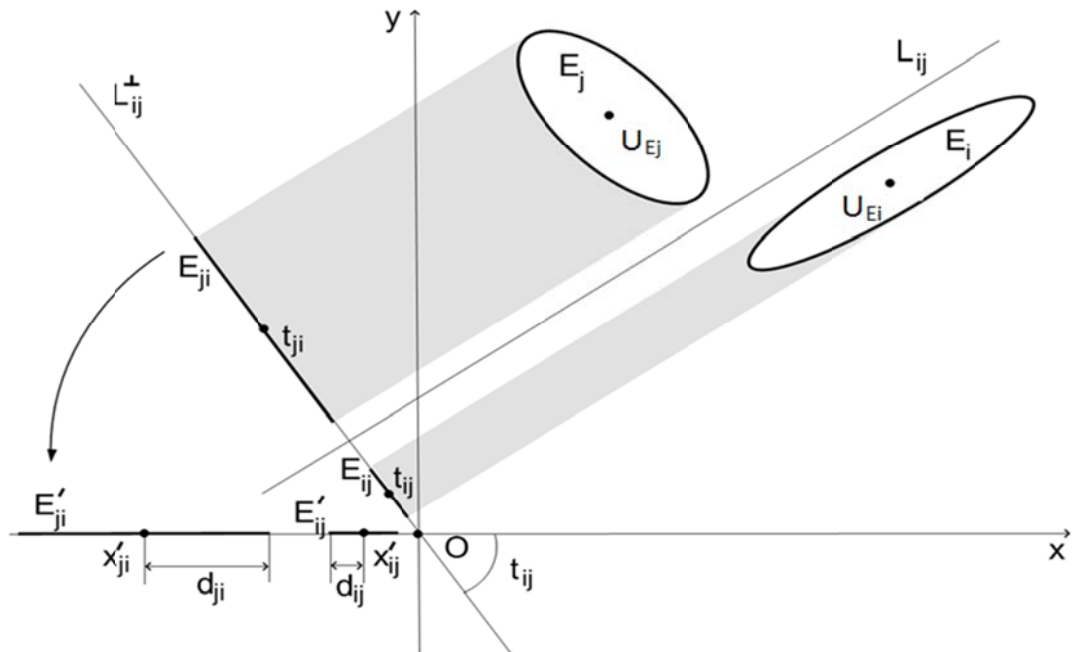


Рис. 3. Геометрична ілюстрація до побудови ϕ -функції $\Phi^{E_i E_j}$

Нехай існує пряма L_{ij} (розділяюча пряма), що розбиває площину на дві півплощини таким чином, що об'єкти $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ лежать в різних півплощинах. Отже, проекції множин $E_i(u_{E_i})$ і $E_j(u_{E_j})$ на будь-яку пряму, перпендикулярну L_{ij} , не перетинаються (не мають спільних внутрішніх точок в R^1). Позначимо через L_{ij}^\perp пряму, яка перпендикулярна L_{ij} і проходить через центр системи координат, t_{ij} – кут між прямою L_{ij}^\perp і віссю Ox .

Повернувши пряму L_{ij}^\perp разом з проекціями еліпсів E_{ij} і E_{ji} (з центрами в точках u_{ij} і u_{ji} відповідно) навколо точки O на кут $(-t_{ij})$, отримаємо проекції еліпсів E'_{ij} і E'_{ji} з центрами в точках x'_{ij} і x'_{ji} .

Таким чином, в результаті геометричного моделювання показано, що умова неперетинання еліпсів $E_i(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ еквівалентна умові: $x'_{ij} - x'_{ji} \geq d_{ij} + d_{ji}$, а ϕ -функція $\Phi^{E_i E_j}$ може бути записана у вигляді: $\Phi^{E_i E_j} = x'_{ij} - x'_{ji} - d_{ij} - d_{ji}$, де $x'_{ij} = x_{ij} \cos t_{ij} - y_{ij} \sin t_{ij}$, $x'_{ji} = x_{ji} \cos t_{ij} - y_{ji} \sin t_{ij}$, t_{ij} – кут між прямою L_{ij}^\perp , яка перпендикулярна розділяючій прямій L_{ij} , і віссю Ox ,

$$d_{ij} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(\theta_i - t_{ij})}, d_{ji} = \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(\theta_j - t_{ij})}.$$

Властивість 1. Точка на перерізі поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$, який відповідає певному значенню кута повороту $\theta_{E_j, d}$, – це пара відрізків, які торкаються, коли $r_{ij}=0$, і знаходяться на відстані r_{ij} при наявності відстані між еліпсами.

Властивість 2. При зміні параметрів $(x_{E_i}, y_{E_i}, \theta_{E_i})$ та $(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ $E_i(u_{E_i})$, $E_j(u_{E_j})$, змінюється як розташування пар відрізків на вісі Ox , так і їх розміри, причому $d_{ji} \in [b_j, a_j]$, а $d_{ij} \in [b_i, a_i]$.

Властивість 3. Множина точок перерізу поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$, який відповідає певному значенню кута повороту $\theta_{E_j, d}$, – це неперервна підмножина $M_{E_j, d}$, відповідних до твердження 1, пар відрізків на вісі Ox .

Властивість 4. Множина точок перерізів поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$, яка відповідає кутам повороту $\theta_{E_j, d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, локальної системи координат рухомого об'єкта – це дискретна множина підмножин $M_{E_j, d}$ $d = 0, \dots, n_d - 1$.

Властивість 5. Множина точок поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ та $E_i(0,0,0)$ – це нескінчена множина пар відрізків на вісі Ox .

Згідно твердження 1 розроблено алгоритм геометричного моделювання побудови квазі- ϕ -функції еліпсів:

Крок 1. Побудуємо розділяючу пряму L_{ij} : $y = kx + b$ [6] для еліпсів $E_i(t_i)$ и $E_j(t_j)$. Запишемо рівняння паралельної їй прямої, що проходить через точку (x_i, y_i) , як L'_{ij} : $y - y_i = k(x - x_i)$.

Крок 2. Рівняння прямої $L_{ij}^\perp: y = -\frac{1}{k}x$.

Крок 3. Позначимо через (x_{ij}, y_{ij}) точку перетину прямих L_{ij}' і L_{ij}^\perp . Ця

точка визначається з системи:
$$\begin{cases} y_{ij} - y_i = k(x_{ij} - x_i); \\ y_{ij} = -\frac{1}{k}x_{ij}. \end{cases}$$

В результаті отримаємо: $x_{ij} = \frac{(kx_i - y_i)k}{k^2 + 1}; y_{ij} = \frac{y_i - kx_i}{k^2 + 1}$.

Крок 4. Визначимо кут повороту t_{ij} прямої L_{ij}^\perp .

Крок 5. Визначимо $x'_{ij} = x_{ij} \cos t_{ij} - y_{ij} \sin t_{ij}$.

Крок 6. Виконуючи кроки 1 – 4, визначимо $x'_{ji} = x_{ji} \cos t_{ij} - y_{ji} \sin t_{ij}$

для еліпсу $E_j(t_j)$.

Крок 7. Визначимо

$$d_{ij} = \sqrt{a_i^2 \cos^2(\theta_i - t_{ij}) + b_i^2 \sin^2(\theta_i - t_{ij})} = \sqrt{b_i^2 + (a_i^2 - b_i^2) \cos^2(\theta_i - t_{ij})}$$

та

$$d_{ji} = \sqrt{a_j^2 \cos^2(\theta_j - t_{ij}) + b_j^2 \sin^2(\theta_j - t_{ij})} = \sqrt{b_j^2 + (a_j^2 - b_j^2) \cos^2(\theta_j - t_{ij})}$$

Крок 7. Побудуємо квазі-phi-функцію

$$\Phi^{E_i E_j} = x'_{ij} - x'_{ji} - d_{ij} - d_{ji}.$$

Висновки. В даній роботі запропоновано метод побудови умов неперетинання еліпсів, який володіє меншою складністю порівняно з відомими методами за рахунок того, що здійснюється геометричне моделювання цих умов не у просторі R^3 (R^6 , якщо еліпс $E_j(x_{E_j}, y_{E_j}, \theta_{E_j})$ рухомий), а у просторі R^1 . Подальші дослідження будуть направлені на розробку методу оптимального розміщення неорієнтованих еліпсів у заданих областях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г. Полный класс Φ -функций для базовых объектов / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов, А.В. Панкратов // Доп. НАН України. – 2010. – № 12. – С. 25 – 30.
2. Стоян Ю.Г. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов // Доп. НАН України. – 2014. – Т 9. – С. 49 – 54.
3. Суббота И.А. Задача оптимальной упаковки эллипсов: математические модели и методы решения / И. А. Суббота: Дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02. «Математичне моделювання та обчислювальні методи» –

- Харьков, 2014. – 120 с.
4. Панкратов А.В. Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей / А.В. Панкратов // Радиоэлектроника и информатика. 2015. 2(69). С. 6 – 9.
 5. Kallrath J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles [Text] / J. Kallrath, S. Rebennack // Journal of Global Optimization. – 2013. – Vol. 59 (2-3). – P. 405 – 437. doi:10.1007/s10898-013-0125-3.
 6. Панкратов А. В. / Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний [Текст] / А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, И. А. Суббота // Журнал обчислювальної математики. – 2014. – Т. 1 – С. 27 – 42.
 7. Комяк В.М. Исследование упаковки эллипсов в задачах большой размерности / В. М. Комяк, В. В. Комяк, А.Н. Данилин // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies ISSN1729-3774. –1/4(85), 2017.–С.17–23.