#### УДК 519.85

О.М. ДАНІЛІН

Національний університет цивільного захисту України

В.В. КОМЯК

Національний університет цивільного захисту України

В.М. КОМЯК

Національний університет цивільного захисту України

К.Т.КЯЗІМОВ

**ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА ПРИКЛАДИ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ ОБЛАСТІ НА ПІДОБЛАСТІ ЗА ВИЗНАЧЕНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ**

*Використовуючи поняття геометричної інформації запропоновано спосіб формалізації обмежень в задачі розбиття області на підобласті. Побудовано математичну модель задачі розбиття та здійснена її декомпозиція на задачу розбиття заданої області з урахуванням її просторової форми на декілька видів підобластей, кожна з яких, в свою чергу, розбивається на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями. Описано практичне застосування задачі оптимізації розбиття за заданими обмеженнями.*

*Ключові слова - геометричний об'єкт, геометрична інформація, розбиття, трасування, математична модель, оптимізація.*

А.Н.ДАНИЛИН

Национальный университет гражданской защиты Украины

В.В. КОМЯК

Национальный университет гражданской защиты Украины

В.М. КОМЯК

Национальный университет гражданской защиты Украины

**ФОРМАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ НА ПОДОБЛАСТИ ЗА ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

*Используя понятие геометрической информации предложен способ формализации ограничений в задаче разбиения области на подобласти. Построена математическая модель задачи разбиения и осуществлена ее декомпозиция на задачу разбиения заданной области с учетом ее пространственной формы на несколько видов подобластей, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на подобласти по разным критериям качества и ограничениям. Описаноы практическое применение задачи оптимизации разбиения по заданным ограничениями.*

*Ключевые слова - геометрический объект, геометрическая информация, разбиения, трассировки, математическая модель, оптимизация.*

A.N. DANILIN

National university of the civil protection of the Ukraine

V.V. KOMYAK

National university of the civil protection of the Ukraine

V.М. KOMYAK

**FORMALIZATION AND EXAMPLES OF PROBLEMS OF PARTITIONING OF THE AREA AT THE APPROACH FOR THE RESTRICTIONS DEFINED**

*The tasks of packing (layout, coveraging and partitioning) of spatial objects belong to geometrical design problems and are related to the optimization of geometric information about objects according to the function of purpose and constraints. Geometric information about a geometric object consists of three components: spatial forms, metric parameters of the form, which specify their dimensions, and parameters of placement in space.*

*The configuration space of an object is a space, the metric parameters and parameters of their placement are generalized variables. The configuration space of a set of objects is a direct product of the configuration spaces of each of the multiple object objects. Displaying a plurality of objects in their configuration space according to a given set of constraints specifies the spatial configuration of geometric objects.*

*In the article the further development of the notion of spatial configurations of geometric objects is obtained, and the limitations have been made that allowed to form a class of spatial configurations of the partition, in particular the division of the region into a subregion, each of which is split into subsets of different functions of the purpose and various constraints.*

*As examples, reviewed.*

*The task of partitioning a three-dimensional area (for example, a building) into two types of domains, the first is the areas by function (premises) with the maximization of their squares under given constraints; the second one is a subregion that defines a rational network of tracks to each of the regions by the given criterion and restrictions.*

*The task of partitioning the two-dimensional area (crop area). to two types of subsets, the first form is the regions (plots for different cultures) with the given ratio of their areas, provided they are maximized and with allowance for restrictions, the second species is a subdivision that determines the tracks to each of the subregions taking into account the given criteria and constraints.*

*Keywords - geometric object, geometric information, partition, traces, mathematical model, optimization.*

**Постановка проблеми**

Задачі упаковки (компоновки, покриття, розбиття) просторових об’єктів заданої форми належать до задач геометричного проектування [1–2] і пов’зані з математичним моделюванням геометричних об’єктів та їх взаємних відношень [3–6].

Однією із задач, яка класифікується як задача геометричного проектування є задача розбиття області на підобласті.На сьогоднішній день існує великий клас важливих практичних задач, який може бути зведений в математичній постановці до задач оптимального розбиття заданої множини на підмножини. Це, наприклад, задача розміщення підприємств з одночасним розбиттям заданого регіону на області споживачів, задача про виборчі округи, тощо. Задача оптимального розбиття заданих множин можна умовно розділити на 2 класи:

- задачі, в яких множина, яка підлягає розбиттю, є континуальною (неперервні задачі розбиття);

- задачі, в яких множина, яка підлягає розбиттю, складається з кінцевої кількості елементів (дискретні задачі розбиття).

В даній роботі розглядається дискретна задача розбиття області на групи підобластей різних видів, тобто кожна з них розбивається на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями.

До такої задачі відносяться актуальні практичні задачі облаштування територій (будівництво стоянок автотранспорту та проектування сполучних під'їзних доріг); паювання землі і прокладка допоміжних трас, що забезпечують доступ до будь-якого з ділянок; раціональної прокладки комунікаційних з'єднань в будівництві, судно- і авіабудуванні; трасування багатошарових плат в радіоелектроніці, тощо.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Математична теорія неперервних задач оптимального розбиття множин, яка приведена в монографії Є.М. Кисельової та Н.З. Шора [7], базується на єдиному підході, а саме, зведенні нескінченновимірних задач оптимізації певним чином (наприклад, за допомогою функціоналу Лагранжа) до негладких, як правило, конечно мірних задач оптимізації, для чисельного вирішення яких застосовуються сучасні ефективні методи оптимізації - різноманітні варіанти r -алгоритмів, які розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора. Методи вирішення дискретних задач розбиття наведені, наприклад, в роботах [8, 9].

**Мета дослідження**

Метою статті є формалізація обмежень в задачі розбиття області на підобласті та побудова її математичної моделі.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

В роботі розглядається наступна задача. Дана область  довільної просторової форми. Необхідно розбити область на *m* видів підобластей, кожна з яких розбивається на підобласті з різними критеріями якості та обмеженнями.

Як сказано вище, сформульована задача відноситься до класу задач геометричного проектування [1] і полягає в відображенні  деякого вихідної множини  елементів довільної природи в абстрактну множину Ω відповідної структури при виконанні заданого набору обмежень ,  Таке відображення називається конфігурацією і здійснюється в конфігураційному просторі [10]. Розглянемо ці поняття для задачі, що розглядається.

Конфігураційний простір геометричних об’єктів базується на формалізації поняття геометричної інформації. Геометрична інформація  про об’єкт  включає в себе просторову форму , його метричні характеристики  та параметри розміщення . Будемо задавати просторову форму  геометричного об’єкта рівнянням його границі у вигляді , де , , константи, які характеризують його метричні властивості (розміри), назвемо їх параметрами просторової форми об’єкта .

Зв’яжемо з об’єктом власну систему координат, початок якої – це полюс об’єкта. При афінних перетвореннях рух об’єкта змінює положення його власної системи координат відносно нерухомої системи координат простору . Для характеристики такого положення задамо параметри розміщення  Cформуємо конфігураційний простір  об’єкта  з узагальними змінними: метричними параметрами  та параметрами розміщення  Тоді кожна точка  конфігураційного простору  визначає геометричний об’єкта 

Позначимо через  конфігураційний простір об’єкта  з узагальненими змінними  і нехай  – початок власної нерухомої системи координат.

Нехай  - початкова множина геометричнихоб’єктів, де  відповідно множини з узагальненими змінними , а - множина можливих їх просторових форм. Кожній точці  відповідає параметризований геометричний об’єкт  Конфігураційний простір буде мати вид  з узагальненими змінними 

За допомогою теоретико-множинних операцій сформуємо складний геометричний об’єкт  Оператор задає структуру складного об’єкта. Тоді складеному об’єкту  в конфігураційному просторі  буде відповідати параметризований геометричний об’єкт 

***Визначення 1*** [10]. Відображення  множини геометричних об’єктів в конфігураційний простор , яке задовольняє заданому набору обмежень , задає просторову конфігурацію геометричних об’єктів 

Розглянемо множину об’єктів (складений об’єкт)

 (1)

позначимо його, як



та побудуємо конфігураційний простір  з узагальненими змінними 

Нехай , аналогічно вище визначеному сформуємо конфігураційний простір

******

з узагальненими змінними 

Задамо структуру складеного об’єкта у вигляді



Введемо поняття просторової конфігурації розбиття. Для формування системи обмежень  задамо на множині об’єктів із  бінарні та багатомісні відношення:

а) неперетин , тобто  

б) перетин  , тобто  , якщо 

в) включення , тобто  якщо *.*

Слід зазначити, що– це топологічна внутрішність об’єкта .

***Визначення 2.*** Відображення задає конфігурацію розбиття, якщо ,  та  , 

Сформулюємо математичну модель задачі. Необхідно визначити оптимальну геометричну інформацію , що характеризує раціональність розбиття:

, (1)

де   – вихідна геометрична інформація в задачі розбиття;  – відображення, яке перетворює вихідну геометричну інформацію в оптимальну геометричну інформацію .

Інакше кажучи, необхідно визначити оптимальний вектор змінних параметрів , що відповідає оптимальній геометричній інформації , при якому функціонал якості , що характеризує раціональність розбиття на *m* підобластей з урахуванням заданої системи обмежень , досягав би екстремального значення:

, (2)

де ;  – змінні параметри компонент геометричної інформації , що відносяться до характеристик розбиття з урахуванням відповідних обмежень.

Як приклади, розв’язані задачі розбиття області на два вида областей: перший вид підобластей враховує ефективність використання цільового об’єму (площі) від розв’язання задачі розбиття, а друга – від розв’зання задачі трасування.

Функціонал , що описує якість одержуваного розв’язку задачі розбиття на два вида областей, або задачі розбиття і трасування, відображає ефективність проектних рішень і складається з двох складових: перша враховує ефективність використання цільового об’єму (площі) від розв’язання задачі розбиття, а друга – від розв’зання задачі трасування.

Визначимо зміст обмежень на змінні параметри задачі:

 (3)

де  – обмеження задачі, що пов’язані з розбиттям;  – обмеження задачі, що пов’язані з трасуванням.

За фізичним змістом параметри, які визначаються, поділяються на параметри, що характеризують розбиття, і параметри, що характеризують трасування. Попередня особливість покладена в основу декомпозиції двухритеріальної задачі на дві взаємопов'язані підзадачі меншої розмірності: задачу розбиття і задачу трасування. Вищесказане призводить до доцільності розгляду спочатку задачі розбиття, а потім, на множині підобластей та їх границь, – задачі трасування. Скористаємося підходом ранжування критеріїв:

****** (4)

де  – критерій якості розбиття;  – критерій якості трасування.

До постановки (1-4) зводяться наступні задачі.

Задача 1. Задача обґрунтування раціональної мережі шляхів евакуації, яка виникає на етапі проектування будівель. Оскільки шляхи евакуації пронизують весь будинок, а їх структура і розміри пов'язані з компонуванням приміщень, то підвищення ефективності протипожежних рішень може вступити в протиріччя з економічними і технічними показниками проектних рішень. Інакше кажучи, проектні рішення можна вважати неефективними, якщо рішення по забезпеченню безпеки людей будуть приводити до неефективного використання площ будівлі. Тому актуальною є задача обґрунтування об'ємно-планувальних рішень будівель, як з точки зору ефективного використання корисних площ будівель, так і з точки зору проектування шляхів евакуації з них.

Нехай для проектування визначені: тривимірна область  будь-якої просторової форми, що описує - поверхову будівлю, приміщення різного функціонального призначення на кожному поверсі з різною кількістю людей у них. Проектувальник визначає місця входу в будівлю  які задаються діапазоном значень  і визначають місце розташування сходів. Сходи мають форму прямокутних паралелепіпедів. Виникає така задача.

Необхідно розбити область  на два типа підобластей, перший вид – це області    за функціональним призначенням будівлі (поверхи  та приміщення на поверхах  з максимізацією їх об’ємів при обмеженнях норм проектування), другий – це області що визначають раціональну мережу коридорів  та сходів , за заданим критерієм (наприклад, за критерієм часу руху потоків людей при обмеженнях як на параметри потоку, так і на метричні характеристики (розміри) трас, що враховують норми будівництва).

Підходи до розв’язання задачі наведено в роботі [11].

Задача 2. Нехай для розбиття задано область яка описує земельні площі, які виділяються під засіви різних культур. Необхідно розбити область  на два типа підмножин, перший вид – це ділянки для різних культур з заданим співвідношенням їх площ та з урахуванням агротехнічних, протипожежних вимог (з максимізацією їх площ), другий вид – це дороги до кожної з ділянок з урахуванням економічних обмежень (наприклад за критерієм мінімізацію часу вивозу урожаю, який планується).

Підходи до розв’язання задачі наведено в роботі [12].

**Висновки**

В статті введено поняття просторової конфігурації розбиття області на підобласті, за допомогою якого побудовано модель її розбиття на декілька видів під областей, кожна з яких розбивається, в свою чергу. на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями. Розгляд метричних параметрів об'єктів в якості незалежних змінних розширює можливості застосування методів локальної та глобальної оптимізації стосовно задач розбиття області на підобласті і може бути використано при розбитті відсіків транспортних засобів для перевезення вантажів та їх зберігання, в системах розпізнавання образів, в робототехніці, тощо.

**Перелік використаної літератури**

1. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования. – Харьков: ИПМаш АН УССР, 1983. 36 с. (Препринт. НАН Украины, ИПМаш АН Украины, №181).
2. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. Advances in CAD/CAM. Proceedings of PROLAMAT82, Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2003.
3. Стоян Ю.Г. Размещения геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1975. 239 с.
4. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. Думка, 1976. 247 с.
5. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с.
6. Елементы теории геометрического проектирования/ Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др../ под редак. В.Л. Рвачева. К.: Наук, думка, 1995. 241c.
7. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. К: Наук. Думка, 2005. 562 с
8. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные и динамические задачи. К: Наук. думка, 2013. 604 с.
9. Kiseleva E.M., [Koriashkina, L.S.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55844269100&amp;eid=2-s2.0-84957845350) Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51, №4. P. 489–499.
10. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков: Константа, 2017. 404 с.
11. Комяк В.В., Комяк В.М., Соболь А.Н. Разбиение и трассировка в задачах пожарной безопасности строительства. Харків: НУЦЗУ, 2016. 160 с.
12. Комяк В.М., Соболь А.Н., Долгодуш М.Н. Рациональное разбиение посевных площадей по заданным требованиям. Харьков: УЦЗ Украины, 2008. 91с.
13. Stoyan Yu.G. Osnovnaya zadacha geometricheskogo proektirovaniya. – Harkov: IPMash AN USSR, 1983. 36 s. (Preprint. NAN Ukrainyi, IPMash AN Ukrainyi, #181).
14. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. Advances in CAD/CAM. Proceedings of PROLAMAT82, Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2003.
15. Stoyan Yu.G. Razmescheniya geometricheskih ob'ektov. K.: Nauk. dumka, 1975. 239 s.
16. Stoyan Yu.G., Gil N.I. Metodyi i algoritmyi razmescheniya ploskih geometricheskih ob'ektov. K.: Nauk. Dumka, 1976. 247 s.
17. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. Matematicheskie modeli i optimizatsionnyie metodyi geometricheskogo proektirovaniya. K.: Nauk. dumka, 1986. 268 s.
18. Elementyi teorii geometricheskogo proektirovaniya/ Yakovlev S.V., Gil N.I., Komyak V.M. i dr../ pod redak. V.L. Rvacheva. K.: Nauk, dumka, 1995. 241c.
19. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Nepreryivnyie zadachi optimalnogo razbieniya mnozhestv: teoriya, algoritmyi, prilozheniya. K: Nauk. Dumka, 2005. 562 s
20. Kiseleva E.M., Koryashkina L.S. Modeli i metodyi resheniya nepreryivnyih zadach optimalnogo razbieniya mnozhestv: lineynyie, nelineynyie i dinamicheskie zadachi. K: Nauk. dumka, 2013. 604 s.
21. Kiseleva E.M., Koriashkina, L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. Cybernetics and Systems Analysis. 2015. Vol. 51, #4. P. 489–499.
22. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Evklidovyi kombinatornyie konfiguratsii. Harkov: Konstanta, 2017. 404 s.
23. Komyak V.V., Komyak V.M., Sobol A.N. Razbienie i trassirovka v zadachah pozharnoy bezopasnosti stroitelstva. HarkIv: NUTsZU, 2016. 160 s.
24. Komyak V.M., Sobol A.N., Dolgodush M.N. Ratsionalnoe razbienie posevnyih ploschadey po zadannyim trebovaniyam. Harkov: UTsZ Ukrainyi, 2008. 91s.

ДАНІЛІН Олександр Миколайович – к.т.н., начальник наглядово-профілактичної кафедри Національного університету цивільного захисту України, e-mail: [danilin7887@gmail.com](mailto:danilin7887@gmail.com).

КОМЯК Володимир Володимирович – к.т.н., старший викладач кафедри управління в сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України, e-mail: v[vkomyak@ukr.net](mailto:vkomyak@ukr.net).

КОМЯК Валентина Михайлівна – д.т.н., професор, професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, e-mail: [vkomyak@ukr.net](mailto:vkomyak@ukr.net).